Decisioni di consumo I

Preferenze e massimizzazione dell'utilità

Nadia Burani

Università di Bologna

A.A. 2017/18

In sintesi

- Due approcci alla teoria del consumatore:
  1. Teoria classica (trattata in "Decisioni di consumo I-II"):
     - la caratteristica fondamentale del consumatore è rappresentata dai suoi gusti (descritti attraverso le preferenze o attraverso la funzione di utilità)
     - si impongono restrizioni di razionalità sulle preferenze (sulla funzione di utilità)
     - si esaminano le implicazioni di tali assiomi sulle decisioni prese, sulle scelte di consumo
  2. Approccio alternativo (trattato in "Decisioni di consumo III"):
     - la caratteristica fondamentale del consumatore è rappresentata dal suo comportamento (scelte di consumo)
     - si impongono restrizioni di coerenza sul comportamento del consumatore
     - approccio su cui sono basati i modelli econometrici

La teoria classica

- Il problema del consumatore
  - L'oggetto di scelta: panieri di consumo
  - Le preferenze del consumatore e la funzione di utilità
  - Le restrizioni alla scelta: l'insieme di bilancio
- La massimizzazione dell'utilità
  - domanda walrasiana (o marshalliana)
  - proprietà
  - funzione di utilità indiretta

Il problema del consumatore: l'oggetto di scelta

- Il consumatore sceglie quanto consumare di ciascun bene o servizio disponibile per l'acquisto.
  - il numero di beni e servizi disponibili è noto, finito e indicato con $k = 1, 2, ...K$.
- L'oggetto di scelta del consumatore è un paniere di consumo, una lista di quantità dei diversi beni e servizi

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_K \end{bmatrix},$$

dove $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^K$ e dove x_k rappresenta la quantità del bene k che il consumatore desidera consumare.

Il problema del consumatore: l'insieme di consumo

- Le scelte di consumo sono tipicamente limitate da alcuni vincoli.
- I possibili panieri di consumo tra cui scegliere devono appartenere all'insieme di consumo X

Insieme di consumo Sottoinsieme dello spazio dei panieri, che si denota con $X \subset \mathbb{R}^K$ e che rappresenta tutti i panieri che un individuo può verosimilmente consumare dati i vincoli imposti dall'ambiente

Esempi bene consumato in quantità discrete, incompatibilità tra il consumo di due beni, tetto massimo al consumo di un bene, sopravvivenza (livello minimo)....

Il problema del consumatore: l'insieme di consumo

- Per semplicità si assume che X coincida con l'ortante positivo di $\mathbb{R}^K$ ovvero
$$X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^K \mid x_k \geq 0, \; k = 1, 2 \ldots K \right\} = \mathbb{R}_+^K$$
- Si assume che tutti i beni siano infinitamente divisibili
- L'insieme di consumo X è *chiuso* (contiene la sua frontiera) e *convesso.*[1]

[1] Un insieme X è *convesso* se dati due punti $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$ tali che $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in X$ allora $\mathbf{x}'' \in X$ con $\mathbf{x}'' = \alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \mathbf{x}'$ e $\alpha \in [0, 1]$ Un insieme è convesso se contiene il segmento che congiunge due punti appartementi all'insieme.
Un insieme X è *strettamente convesso* se dati due punti $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$ tali che $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in X$ allora $\mathbf{x}'' \in intX$ con $\mathbf{x}'' = \alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \mathbf{x}'$ e $\alpha \in (0, 1)$ Un insieme è strettamente convesso se i punti appartenenti al segmento che congiunge due punti dell'insieme sono punti interni dell'insieme e non appartengono alla frontiera.

Il problema del consumatore: le preferenze

- La preferenza $\succsim$ è una relazione binaria d'ordine definita sull'insieme degli oggetti di scelta, ovvero sui panieri appartenenti all'insieme di consumo X.
- Dati $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ qualsiasi, $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$ si legge "il paniere **x** è almeno tanto desiderabile quanto **y**" oppure "il paniere **x** è debolmente preferito a **y**".
- Dalla preferenza debole $\succsim$ discendono altre due relazioni:
  - la preferenza stretta $\succ$

    $$\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \Longleftrightarrow \mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \text{ ma non } \mathbf{y} \succsim \mathbf{x}$$

    ovvero "il paniere **x** è strettamente preferito a **y**"
  - l'indifferenza $\sim$

    $$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \Longleftrightarrow \mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \text{ e anche } \mathbf{y} \succsim \mathbf{x}$$

    ovvero "il paniere **x** è indifferente a **y**".

- Nella teoria microeconomica, si assume che le preferenze $\succsim$ soddisfino alcune proprietà.

Razionalità La relazione di preferenza debole $\succsim$ è *razionale* se soddisfa le proprietà seguenti:

(*i*) Completezza: per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$ o $\mathbf{y} \succsim \mathbf{x}$ (o entrambi)

(*ii*) Transitività: per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$, se $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$ e $\mathbf{y} \succsim \mathbf{z}$, allora $\mathbf{x} \succsim \mathbf{z}$.

- Completezza implica riflessività (si prenda $\mathbf{x} = \mathbf{y}$)

Il problema del consumatore: le preferenze

- Implicazioni della razionalità di $\succsim$ per l'indifferenza e la preferenza stretta
- Se $\succsim$ è razionale, allora:

  (*i*) $\succ$ è irriflessiva e transitiva
  (*ii*) $\sim$ è riflessiva, transitiva e simmetrica (se $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ allora $\mathbf{y} \sim \mathbf{x}$)
  (*iii*) se $\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \succsim \mathbf{z}$, allora $\mathbf{x} \succ \mathbf{z}$.

Il problema del consumatore: le preferenze

- Data la relazione $\succsim$ ed un paniere qualsiasi $\mathbf{x} \in X$, si possono definire tre tipi di insiemi di panieri:

  (*i*) l'insieme dei panieri indifferenti a $\mathbf{x}$: $\{\mathbf{y} \in X \mid \mathbf{y} \sim \mathbf{x}\}$ o insieme (curva) di indifferenza

  (*ii*) l'insieme dei panieri debolmente preferiti a $\mathbf{x}$: $\{\mathbf{y} \in X \mid \mathbf{y} \succsim \mathbf{x}\}$ o insieme di livello superiore

  (*iii*) l'insieme dei panieri a cui $\mathbf{x}$ è debolmente preferito: $\{\mathbf{y} \in X \mid \mathbf{x} \succsim \mathbf{y}\}$ o insieme di livello inferiore

Il problema del consumatore: le preferenze

- Si assume inoltre che le preferenze soddisfino l'ipotesi di *desiderabilità*
  - i panieri di consumo contengono "beni" e non "mali"
  - panieri abbondanti sono preferiti a panieri più scarsi
- Ci sono tre diverse nozioni di desiderabilità

Non-sazietà locale La preferenza $\succsim$ soddisfa la *non-sazietà locale* se, per ogni $\mathbf{x} \in X$ ed $\varepsilon > 0$ esiste un $\mathbf{y} \in X$ tale che $\mathbf{y} \in B_{\varepsilon}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$.

- La non-sazietà locale esclude che l'insieme dei panieri indifferenti ad $\mathbf{x}$ sia spesso

Il problema del consumatore: le preferenze

Monotonicità La preferenza $\succsim$ soddisfa la *monotonicità (debole)* se per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ tali che $\mathbf{y} \gg \mathbf{x}$, allora $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$.

- La monotonicità debole ammette che il consumatore sia indifferente rispetto all'aumento della quantità di alcuni beni ma non di tutti

Monotonicità stretta La preferenza $\succsim$ soddisfa la *monotonicità stretta* se, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ tali che $\mathbf{y} \geq \mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$, allora $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$.

- La monotonicità stretta richiede che un paniere che contiene quantità maggiori di almeno un bene sia strettamente preferito ad un altro
- La monotonicità stretta implica la monotonicità e la monotonicità implica la non-sazietà

Esempio preferenze Leontieff

Il problema del consumatore: le preferenze

- Si assume che le preferenze soddisfino l'ipotesi di *convessità*
  - inclinazione del consumatore per la diversificazione, la varietà

Convessità La preferenza $\succsim$ soddisfa la *convessità* se per ogni $\mathbf{x} \in X$ l'insieme di livello superiore è convesso, ovvero se per tutti $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ tali che $\mathbf{y} \succsim \mathbf{x}$ e $\mathbf{z} \succsim \mathbf{x}$, si ha $\alpha \mathbf{y} + (1 - \alpha) \mathbf{z} \succsim \mathbf{x}$ con $\alpha \in [0, 1]$.

Convessità stretta La preferenza $\succsim$ soddisfa la *convessità stretta* se, per tutti $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ tali che $\mathbf{y} \succsim \mathbf{x}$, $\mathbf{z} \succsim \mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$, si ha $\alpha \mathbf{y} + (1 - \alpha) \mathbf{z} \succ \mathbf{x}$ con $\alpha \in (0, 1)$.

- La convessità stretta esclude che l'insieme di livello superiore abbia dei "tratti piatti"

Il problema del consumatore: le preferenze

- Infine, si assume che le preferenze soddisfino l'ipotesi di *continuità* (ipotesi tecnica per consentire la rappresentabilità)

Continuità La preferenza $\succsim$ è *continua* se, per ogni coppia di successioni di panieri $\{(\mathbf{x}^n, \mathbf{y}^n)\}_{n=1}^{\infty}$ con $\mathbf{x}^n \succsim \mathbf{y}^n$ per ogni n, tali che $\lim_{n \longrightarrow \infty} \mathbf{x}^n = \mathbf{x}$ e $\lim_{n \longrightarrow \infty} \mathbf{y}^n = \mathbf{y}$, si ha $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$.

- La continuità è anche soddisfatta se per ogni $\mathbf{x} \in X$ gli insiemi di livello superiore e di livello inferiore sono insiemi chiusi.

Esempio preferenze lessicografiche: con due soli beni e $X = \mathbb{R}_+^2$, $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$ se $x_1 > y_1$ oppure se $x_1 = y_1$ e $x_2 \geq y_2$. Si considerino le successioni di panieri $\mathbf{x}^n = (1/n, 0)$ e $\mathbf{y}^n = (0, 1)$.

Il problema del consumatore: la funzione di utilità

Funzione di utilità Una funzione $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di utilità che rappresenta la relazione di preferenza $\succsim$ se, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$,

$$\mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \Leftrightarrow u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{y})$$

e

$$\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \Leftrightarrow u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y})$$

Rappresentabilità Si supponga che la relazione di preferenza $\succsim$ su X sia razionale e continua. Allora esiste una funzione di utilità $u(\mathbf{x})$ continua che rappresenta $\succsim$.

- La funzione di utilità non è unica: ogni trasformazione strettamente crescente di u rappresenta $\succsim$, come $v(\mathbf{x}) = f(u(\mathbf{x}))$, dove $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione strettamente crescente.

Il problema del consumatore: la funzione di utilità

- Le ipotesi fatte sulle preferenze $\succsim$ si traducono in proprietà della funzione di utilità
- Se le preferenze $\succsim$ sono strettamente monotone, allora la funzione di utilità è strettamente crescente:
  - $u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y})$ se $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$
  - se $u(\mathbf{x})$ è differenziabile allora $\bigtriangledown u(\mathbf{x}) \gg 0$, ovvero l'*utilità marginale* $UM_k \equiv \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_k} > 0$ per ogni $k = 1, .., K$

Il problema del consumatore: la funzione di utilità

- Se le preferenze $\succsim$ sono convesse, allora la funzione di utilità è quasiconcava
  - gli insiemi di livello superiore $\{\mathbf{x} \in X \mid u(\mathbf{x}) \geq \overline{u}\}$, con $\overline{u} \in \mathbb{R}$, sono convessi
  - se $u(\mathbf{x})$ è differenziabile allora la matrice hessiana orlata di $u(\mathbf{x})$ è semidefinita negativa.[2]
- Se le preferenze $\succsim$ sono strettamente convesse, allora la funzione di utilità è strettamente quasiconcava
  - gli insiemi di livello superiore $\{\mathbf{x} \in X \mid u(\mathbf{x}) \geq \overline{u}\}$, con $\overline{u} \in \mathbb{R}$, sono strettamente convessi
  - se $u(\mathbf{x})$ è differenziabile allora la matrice hessiana orlata di $u(\mathbf{x})$ è definita negativa.[3]

---

[2] L'hessiana di una funzione $f(\mathbf{x})$ è la matrice delle derivate seconde di f. E' semidefinita negativa se vale: $\mathbf{z} \cdot Hf(\mathbf{x})\,\mathbf{z} \leq 0$ per i vettori $\mathbf{z}$ tali che $\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{z} = 0$.

[3] Condizione necessaria affinché una matrice simmetrica sia definita negativa è che gli elementi lungo la diagonale principale siano negativi. Condizione necessaria e sufficiente è che i minori principali di guida di ordine dispari siano negativi e di ordine pari siano positivi.

Il problema del consumatore: la funzione di utilità

- Se le preferenze $\succsim$ sono (strettamente) convesse, allora il saggio marginale di sostituzione è (strettamente) decrescente
- Il $SMS_{k,l}$ indica di quanto deve variare la quantità del bene l, a fronte di una piccola variazione nella quantità del bene k per lasciare invariata l'utilità $u(\mathbf{x})$
- Differenziale totale di $u(\mathbf{x})$ quando variano solo le quantità del bene l e del bene k

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_l} dx_l = du(\mathbf{x}) = 0$$

quindi

$$SMS_{k,l} \equiv -\frac{dx_l}{dx_k} = \frac{\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_k}}{\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_l}} = \frac{UM_k}{UM_l}$$

- Il $SMS_{k,l}$ è decrescente perché per compensare il consumatore sono necessari decrementi sempre minori del bene l a fronte di successivi incrementi unitari di k.

Il problema del consumatore: la funzione di utilità

- Sia $K = 2$. conoscendo la funzione di utilità del consumatore si possono rappresentare graficamente le *curve di indifferenza.*
- Una curva di indifferenza è una *curva di livello* della funzione $u(x_1, x_2)$ e soddisfa

$$u(x_1, x_2) = \overline{u}, \text{ con } \overline{u} \in \mathbb{R}$$

- Risolvendo l'equazione $u(x_1, x_2) = \overline{u}$ per x_2 si può studiare la relazione tra x_1 e x_2 lungo la curva di indifferenza $\overline{u}$ (trovare asintoti o intercette...)

Il problema del consumatore: l'insieme di bilancio

- La scelta del consumatore è limitata ai panieri di consumo che il consumatore può permettersi di acquistare.
- Principio di completezza o universalità dei mercati: tutti i K beni e servizi sono scambiati sul mercato ai prezzi che sono pubblicamente quotati

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_K \end{bmatrix}$$

  dove p_k è il prezzo unitario del bene $k-$esimo con $p_k > 0$ per ogni $k = 1, ...K$.
- Il consumatore prende i prezzi come dati: non è in grado di influenzare i prezzi dei beni.

Il problema del consumatore: l'insieme di bilancio

- Un paniere $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^K_+$ è ammissibile se il suo costo totale non eccede la ricchezza del consumatore m, ovvero se

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_K x_K \leq m$$

Insieme di bilancio L'insieme di bilancio competitivo o walrasiano

$$B_{\mathbf{p},m} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^K_+ \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq m \right\}$$

è l'insieme di tutti i panieri di consumo ammissibili per un consumatore che fronteggia i prezzi $\mathbf{p}$ e ha ricchezza $m > 0$.

- L'insieme di bilancio $B_{\mathbf{p},m}$ è un insieme convesso (la convessità di $B_{\mathbf{p},m}$ dipende dalla convessità dell'insieme di consumo X).
- L'insieme $\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^K_+ \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = m \right\}$ è detto iperpiano di bilancio e la sua pendenza riflette i termini di scambio tra due beni.

La massimizzazione dell'utilità

- Il problema del consumatore è quello di scegliere il paniere preferito dall'insieme dei panieri ammissibili

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}\geq 0}{Max} & u(\mathbf{x}) \\ s.v. & \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\leq m \end{array} \qquad \text{(PMU)}$$

Esistenza Se $(\mathbf{p}, m) \gg \mathbf{0}$ e $u(\cdot)$ è continua, allora il problema di massimizzazione dell'utilità (PMU) ha una soluzione

Dimostrazione Se $(\mathbf{p}, m) \gg \mathbf{0}$, l'insieme $B_{\mathbf{p},m}$ è non-vuoto e compatto (chiuso e limitato) e una funzione continua $u(\mathbf{x})$ ha sempre un massimo su un tale insieme.

- Il paniere di consumo ottimale è detto domanda walrasiana o marshalliana e si denota con $\mathbf{x}(\mathbf{p}, m) \in \mathbb{R}_{+}^{K}$.

Proprietà della domanda walrasiana Si supponga che $u(\cdot)$ sia una funzione di utilità continua che rappresenta delle preferenze $\succsim$ razionali, localmente nonsaziate e strettamente convesse definite sull'insieme di consumo $X = \mathbb{R}_{+}^{K}$. Allora la funzione di domanda walrasiana $\mathbf{x}(\mathbf{p}, m)$ soddisfa le seguenti proprietà:

(*i*) omogeneità di grado zero in $(\mathbf{p}, m) : \mathbf{x}(\mathbf{p}, m) = \mathbf{x}(\alpha\mathbf{p}, \alpha m)$ per ogni $\alpha > 0$.[4]

(*ii*) Legge di Walras: $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = m$ per ogni $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{p}, m)$

(*iii*) Unicità: $\mathbf{x}(\mathbf{p}, m)$ consiste di un solo elemento

[4] In generale, una funzione di più variabili $f(x_1, x_2, ..., x_K)$, con $(x_1, x_2, ..., x_K) \geq 0$, è omogenea di grado r, con $r = ... -1, 0, 1...$, se per ogni scalare $\alpha > 0$ vale

$$f(\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_K) = \alpha^r f(x_1, x_2, ..., x_K).$$

La massimizzazione dell'utilità: la Lagrangiana

- Se le preferenze $\succsim$ sono strettamente monotone, se la funzione di utilità $u(\cdot)$ che le rappresenta è differenziabile e se si assume che la soluzione del PMU sia interiore (ovvero $\mathbf{x}(\mathbf{p}, m) \gg \mathbf{0}$), allora essa si caratterizza attraverso le condizioni del primo ordine della Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = u(\mathbf{x}) - \lambda(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - m)$$

che sono

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} &= \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_k} - \lambda p_k = 0 \text{ per ogni } k = 1, ..., K \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - m = 0 \end{aligned}$$

- Nella Lagrangiana il segno di λ è arbitrario

La massimizzazione dell'utilità: la Lagrangiana

- L'utilità marginale del bene k deve essere proporzionale al suo prezzo p_k. In termini vettoriali, il gradiente della funzione di utilità deve essere proporzionale al vettore dei prezzi $\nabla u(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{p}$.
- Per ogni coppia di beni k, l vale

$$\frac{\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_k}}{\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_l}} \equiv SMS_{k,l} = \frac{p_k}{p_l}$$

  - Se $SMS_{k,l} > \frac{p_k}{p_l}$ l'utilità aumenta se x_k aumenta e x_l viene ridotto in modo da rispettare il vincolo di bilancio
  - Se $SMS_{k,l} < \frac{p_k}{p_l}$ l'utilità aumenta se x_l aumenta e x_k viene ridotto in modo da rispettare il vincolo di bilancio

- Il moltiplicatore di Lagrange indica l'utilità marginale della ricchezza

$$\lambda = \frac{\partial u(\mathbf{x}(\mathbf{p}, m))}{\partial m}.$$

La massimizzazione dell'utilità: la domanda walrasiana

Esempio Funzione di utilità Cobb-Douglas $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ con $\alpha, \beta > 0$.

La Lagrangiana del problema è

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta} - \lambda (p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)$$

e le condizioni del primo ordine sono

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} &= \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta} - \lambda p_1 = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} &= \beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1} - \lambda p_2 = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= p_1 x_1 + p_2 x_2 - m = 0
\end{aligned}$$

Dividendo la prima per la seconda si ottiene

$$SMS_{1,2} \equiv \frac{\alpha x_2}{\beta x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

Esempio Funzione di utilità Cobb-Douglas $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ con $\alpha, \beta > 0$.

Le funzioni di domanda walrasiana sono date da

$$x_1(p_1, m) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{m}{p_1},$$

che è indipendente da p_2, e da

$$x_2(p_2, m) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{m}{p_2},$$

che è indipendente da p_1.

La spesa per ciascun bene è una frazione costante della ricchezza del consumatore.

La massimizzazione dell'utilità: la domanda walrasiana

Esempio Funzione di utilità CES $u(x_1, x_2) = \left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}$ con $0 \neq \rho < 1$.

Dalle condizioni del primo ordine si ottiene

$$SMS_{1,2} \equiv \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\rho-1} = \frac{p_1}{p_2}$$

Le funzioni di domanda walrasiana sono date da

$$x_1(\mathbf{p}, m) = \frac{mp_1^{\frac{1}{\rho-1}}}{p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}} \text{ e } x_2(\mathbf{p}, m) = \frac{mp_2^{\frac{1}{\rho-1}}}{p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}$$

Ponendo $r = \rho/(\rho - 1)$ si ottiene

$$x_1(\mathbf{p}, m) = \frac{mp_1^{r-1}}{p_1^r + p_2^r} \text{ e } x_2(\mathbf{p}, m) = \frac{mp_2^{r-1}}{p_1^r + p_2^r}$$

Elasticità di sostituzione E' data dalla variazione percentuale del rapporto tra le quantità rispetto alla variazione percentuale del rapporto tra i prezzi

$$\sigma_{1,2}(\mathbf{p}, m) = -\frac{\partial\left[x_1(\mathbf{p}, m) / x_2(\mathbf{p}, m)\right]}{\partial\left[p_1 / p_2\right]} \frac{p_1 / p_2}{x_1(\mathbf{p}, m) / x_2(\mathbf{p}, m)}$$

La funzione di utilità CES ha elasticità di sostituzione pari a $\sigma_{1,2}(\mathbf{p}, m) = 1/(1-\rho)$.

Esempio La funzione di utilità CES:

Per $\rho = 1$ e $\sigma \to \infty$, la funzione di utilità CES tende all'utilità lineare $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

Per $\rho \to 0$ e $\sigma \to 1$, la funzione di utilità CES tende all'utilità Cobb-Douglas $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$

Per $\rho \to -\infty$ e e $\sigma \to 0$, la funzione di utilità CES tende all'utilità di Leontief $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$

La massimizzazione dell'utilità: Condizioni di Kuhn-Tucker

- E' possibile avere non solo soluzioni interiori ma anche soluzioni d'angolo, tali per cui $x_k(\mathbf{p}, m) = 0$ per qualche k.

Condizioni di Kuhn-Tucker Esistono $\mathbf{x}(\mathbf{p}, m) \geq \mathbf{0}$ soluzioni del PMU e $\lambda \geq 0$ che soddisfano le condizioni del primo ordine:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} &= \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_k} - \lambda p_k \leq 0 && (1)\\
x_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} &= x_k \left[\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_k} - \lambda p_k\right] = 0 && (2)\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - m) \leq 0 && (3)\\
\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= \lambda(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - m) = 0 && (4)
\end{aligned}
$$

La massimizzazione dell'utilità: la domanda walrasiana

- Dalla monotonicità stretta delle preferenze discende che $\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_k} > 0$ per ogni k. Visto che $p_k > 0$, per ogni k, la (1) implica che $\lambda \geq \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_k} / p_k > 0$.
- Il moltiplicatore di Lagrange è strettamente positivo: si può scartare la (3) e dalla (4) discende che vale la legge di Walras, ovvero $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = m$.
- Dalla monotonicità stretta delle preferenze discende anche che esiste almeno un bene per cui $x_l > 0$. Dalla (2) si ha

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_l} = \lambda p_l$$

  ovvero l'utilità marginale del bene l deve essere proprozionale al suo prezzo p_l.
- Per ogni coppia di beni k, l che il consumatore acquista in quantità positive vale

$$\frac{\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_k}}{\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_l}} = \frac{p_k}{p_l}$$

Esempio Beni perfetti sostituti $u(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$ con $\alpha, \beta > 0$.

Le funzioni di domanda walrasiana sono date da

$$(x_1, x_2) = \begin{cases} \left(\frac{m}{p_1}, 0\right) \text{ se } SMS_{1,2} = \frac{\alpha}{\beta} > \frac{p_1}{p_2} \\ \left(0, \frac{m}{p_2}\right) \text{ se } \frac{\alpha}{\beta} < \frac{p_1}{p_2} \\ \text{qls paniere sul vincolo se } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{p_1}{p_2} \end{cases}$$

- Se la funzione di utilità non è differenziabile, non si possono applicare nè Lagrange nè Kuhn-Tucker

Esempio Beni perfetti complementi $u(x_1, x_2) = \min\{\alpha x_1; \beta x_2\}$ con $\alpha, \beta > 0$.

Le funzioni di domanda walrasiana si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \alpha x_1 = \beta x_2 \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \end{cases}$$

e sono date da

$$x_1 = \frac{m\beta}{\alpha p_2 + \beta p_1} \text{ e } x_2 = \frac{m\alpha}{\alpha p_2 + \beta p_1}$$

- Per ogni $(\mathbf{p}, m) \gg \mathbf{0}$, l'utilità massima ottenibile si denota con $v(\mathbf{p}, m)$, si chiama *funzione di utilità indiretta* ed è data da $u(\mathbf{x}^*)$ dove $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(\mathbf{p}, m)$ è la domanda walrasiana soluzione di PMU.

Proprietà dell'utilità indiretta La funzione di utilità indiretta $v(\mathbf{p}, m)$ è:

(i) omogenea di grado zero in $(\mathbf{p}, m)$: $v(\alpha\mathbf{p}, \alpha m) = v(\mathbf{p}, m)$ per ogni $\alpha > 0$

(ii) strettamente crescente in m e non-crescente in p_k per ogni $k = 1, ..K$

(iii) quasi-convessa in $\mathbf{p}$ e m: l'insieme di livello inferiore $\{(\mathbf{p}, m) \mid v(\mathbf{p}, m) \leq \overline{v}\}$ è un insieme convesso per ogni $\overline{v}$

(iv) continua in $\mathbf{p}$ e m

La massimizzazione dell'utilità: l'utilità indiretta

Esempio Funzione di utilità Cobb-Douglas $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$

Date le funzioni di domanda walrasiana, l'utilità indiretta è pari a

$$v(\mathbf{p}, m) = u(x_1(\mathbf{p}, m), x_2(\mathbf{p}, m))$$

ovvero

$$\begin{aligned} v(\mathbf{p}, m) &= \left(\frac{\alpha m}{(\alpha+\beta) p_1}\right)^{\alpha} \left(\frac{\beta m}{(\alpha+\beta) p_2}\right)^{\beta} \\ &= \left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\alpha} \left(\frac{\beta}{p_2}\right)^{\beta} \left(\frac{m}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

La massimizzazione dell'utilità: l'utilità indiretta

Esempio Funzione di utilità CES $u(x_1, x_2) = \left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}$

Date le funzioni di domanda walrasiana, l'utilità indiretta è pari a

$$v(\mathbf{p}, m) = u\left(x_1(\mathbf{p}, m), x_2(\mathbf{p}, m)\right)$$

ovvero

$$\begin{aligned} v(\mathbf{p}, m) &= \left(\left(\frac{m p_1^{\frac{1}{\rho-1}}}{p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}\right)^\rho + \left(\frac{m p_2^{\frac{1}{\rho-1}}}{p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}\right)^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}} \\ &= m\left(p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{-\frac{\rho-1}{\rho}} \end{aligned}$$

Definendo $r = \rho / (\rho - 1)$ si ottiene

$$v(\mathbf{p}, m) = m\left(p_1^r + p_2^r\right)^{-\frac{1}{r}}$$