Decisioni di consumo II

Minimizzazione della spesa, dualità

Nadia Burani

Università di Bologna

A.A. 2017/18

In sintesi

- Il problema duale
- La minimizzazione della spesa
  - domanda hicksiana
  - funzione di spesa
- La dualità: relazione tra il problema di massimizzazione dell'utilità e il problema di minimizzazione della spesa

Il problema duale: la minimizzazione della spesa

- Il problema duale rispetto al PMU è la minimizzazione della spesa (PmS):

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}\geq 0}{Min} & \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \\ s.v. & u(\mathbf{x}) \geq u \end{array} \qquad \text{(PmS)}$$

  con $\mathbf{p} \gg 0$ e $u > u(\mathbf{0})$.
- Entrambi i problemi PMU e PmS caratterizzano lo scopo di un uso efficiente del potere d'acquisto del consumatore ma il PmS rovescia i ruoli di obiettivo e vincolo rispetto al PMU.
- La soluzione del PmS è detta funzione di domanda compensata o hicksiana e si denota con $\mathbf{h}(\mathbf{p}, u) \in \mathbb{R}_{+}^{K}$.

La minimizzazione della spesa: la domanda hicksiana

Proprietà della domanda hicksiana Si supponga che $u(\cdot)$ sia una funzione di utilità continua che rappresenta delle preferenze $\succsim$ razionali, localmente nonsaziate e strettamente convesse definite sull'insieme di consumo $X = \mathbb{R}_+^K$. Allora per ogni $\mathbf{p} \gg 0$ la funzione di domanda hicksiana $\mathbf{h}(\mathbf{p}, u)$ soddisfa le seguenti proprietà:

(i) omogeneità di grado zero in $\mathbf{p}$: $\mathbf{h}(\alpha\mathbf{p}, u) = \mathbf{h}(\mathbf{p}, u)$ per ogni $\alpha > 0$.

(ii) Assenza di eccesso di utilità: $u(\mathbf{x}) = u$ per ogni $\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{p}, u)$

(iii) Unicità: se $u(\cdot)$ è strettamente quasi-concava, allora $\mathbf{h}(\mathbf{p}, u)$ è unica.

(iv) Soddisfa la legge della domanda compensata: per tutti i prezzi $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p}'$,

$$(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \left[\mathbf{h}(\mathbf{p}', u) - \mathbf{h}(\mathbf{p}, u)\right] \leq 0$$

La minimizzazione della spesa: la domanda hicksiana

- La legge della domanda compensata implica che se cambia solo il prezzo del bene k, allora

$$\left(p_k' - p_k\right)\left[h_k\left(\mathbf{p}', u\right) - h_k\left(\mathbf{p}, u\right)\right] \leq 0$$

- L'effetto di una variazione del prezzo p_k sulla domanda compensata per il bene k è non-positivo: la domanda hicksiana non può mai essere positivamente inclinata.
- Quando varia un prezzo, la domanda compensata $\mathbf{h}\left(\mathbf{p}, u\right)$ permette di stabilire come varia la quantità domandata quando la ricchezza del consumatore si aggiusta in modo da permettergli di raggiungere la stessa utilità u

La minimizzazione della spesa: la domanda hicksiana

- Se le preferenze $\succsim$ sono strettamente monotone, se la funzione di utilità $u(\cdot)$ che le rappresenta è differenziabile e se si assume che la soluzione del PmS sia interiore (ovvero $\mathbf{h}(\mathbf{p}, u) \gg \mathbf{0}$) allora essa si caratterizza attraverso le condizioni del primo ordine della Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \lambda (u(\mathbf{x}) - u)$$

  dove λ è il moltiplicatore di Lagrange.

- Le condizioni del primo ordine sono

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} &= p_k - \lambda \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_k} = 0 \text{ per } k = 1, .., K \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= u(\mathbf{x}) - u = 0 \end{aligned}$$

- Dividendo la $k-$esima per la $l-$esima c.p.o. si ottiene la stessa condizione del problema diretto, ovvero $SMS_{k,l} = \frac{p_k}{p_l}$

Esempio Funzione di utilità Cobb-Douglas $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$

Le funzioni di domanda hicksiana sono date da

$$x_1 = h_1(\mathbf{p}, u) = u^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha p_2}{\beta p_1} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

e

$$x_2 = h_2(\mathbf{p}, u) = u^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

Esempio Funzione di utilità CES $u(x_1, x_2) = \left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}$

Le funzioni di domanda hicksiana sono date da

$$x_1 = h_1(\mathbf{p}, u) = \frac{u p_1^{\frac{1}{\rho-1}}}{\left(p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{1}{\rho}}}$$

e

$$x_2 = h_2(\mathbf{p}, u) = \frac{u p_2^{\frac{1}{\rho-1}}}{\left(p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{1}{\rho}}}$$

Ponendo $r = \rho / (\rho - 1)$ si ottiene

$$x_1 = \frac{u p_1^{r-1}}{\left(p_1^r + p_2^r\right)^{\frac{r-1}{r}}} \text{ e } x_2 = \frac{u p_2^{r-1}}{\left(p_1^r + p_2^r\right)^{\frac{r-1}{r}}}$$

La minimizzazione della spesa: la domanda hicksiana

- E' possibile avere non solo soluzioni interiori ma anche soluzioni d'angolo, tali per cui $h_k(\mathbf{p}, u) = 0$ per qualche k.

Condizioni di Kuhn-Tucker Esistono $\mathbf{h}(\mathbf{p}, u) \geq \mathbf{0}$ soluzioni del PMS e $\lambda \geq 0$ che soddisfano le condizioni del primo ordine:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} &= p_k - \lambda \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_k} \geq 0 \\
x_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} &= x_k \left[p_k - \lambda \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right] = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= (u(\mathbf{x}) - u) \geq 0 \\
\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= \lambda (u(\mathbf{x}) - u) = 0
\end{aligned}
$$

Esempio Funzione di utilità lineare $u(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$

Le funzioni di domanda hicksiana sono date da

$$(h_1(\mathbf{p}, u), h_2(\mathbf{p}, u)) = \begin{cases} \left(\frac{u}{\alpha}, 0\right) \text{ se } SMS_{1,2} = \frac{\alpha}{\beta} > \frac{p_1}{p_2} \\ \left(0, \frac{u}{\beta}\right) \text{ se } SMS_{1,2} = \frac{\alpha}{\beta} < \frac{p_1}{p_2} \\ \text{qls paniere su c.i. } u \text{ se } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{p_1}{p_2} \end{cases}$$

Esempio Funzione di utilità Leontieff $u(x_1, x_2) = \min\{\alpha x_1; \beta x_2\}$

Le funzioni di domanda hicksiana sono indipendenti dai prezzi e sono rappresentate dal punto angoloso sulla curva di indifferenza di livello u che tocca la retta di isospesa più bassa possibile.

Le domande hicksiane soddisfano la relazione

$$\alpha x_1 = \beta x_2 = u.$$

Risolvendo per x_1 e x_2 si trova

$$x_1 = h_1(\mathbf{p}, u) = \frac{u}{\alpha}$$

e

$$x_2 = h_2(\mathbf{p}, u) = \frac{u}{\beta}.$$

- Per ogni $\mathbf{x} \gg 0$ e $u > u(\mathbf{0})$ la spesa minima si denota con $e(\mathbf{p}, u)$, è data da $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^*$ dove $\mathbf{x}^*$ è la soluzione di PmS, e si chiama *funzione di spesa*.

Proprietà della funzione di spesa La funzione di spesa $e(\mathbf{p}, u)$ è:

(*i*) omogenea di grado uno in $\mathbf{p}$: $e(\alpha\mathbf{p}, u) = \alpha e(\mathbf{p}, u)$ per ogni $\alpha > 0$.

(*ii*) strettamente crescente in u e non-decrescente in p_k per ogni $k = 1, ..K$

(*iii*) concava in $\mathbf{p}$: $e(\alpha\mathbf{p} + (1-\alpha)\mathbf{p}', u) \geq \alpha e(\mathbf{p}, u) + (1-\alpha) e(\mathbf{p}', u)$ per ogni $\alpha \in [0, 1]$; oppure $e(\mathbf{p}, u)$ ha matrice hessiana delle derivate seconde semidefinita negativa.

(*iv*) continua in $\mathbf{p}$ e u

La minimizzazione della spesa: la funzione di spesa

Esempio Funzione di utilità Cobb-Douglas $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$

Date le funzioni di domanda hicksiane, la funzione di spesa è data da

$$e(\mathbf{p}, u) = p_1 h_1(\mathbf{p}, u) + p_2 h_2(\mathbf{p}, u)$$

ovvero

$$\begin{aligned} e(\mathbf{p}, u) &= p_1 u^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha p_2}{\beta p_1}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + p_2 u^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \\ &= (\alpha+\beta)\left[u\left(\frac{p_1}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_2}{\beta}\right)^{\beta}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \end{aligned}$$

Esempio Funzione di utilità CES $u(x_1, x_2) = \left(x_1^{\rho} + x_2^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$

Date le funzioni di domanda hicksiane, la funzione di spesa è data da

$$e(\mathbf{p}, u) = p_1 h_1(\mathbf{p}, u) + p_2 h_2(\mathbf{p}, u)$$

ovvero

$$\begin{aligned} e(\mathbf{p}, u) &= p_1 \frac{u p_1^{\frac{1}{\rho-1}}}{\left(p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{1}{\rho}}} + p_2 \frac{u p_2^{\frac{1}{\rho-1}}}{\left(p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{1}{\rho}}} \\ &= u\left(p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}} \end{aligned}$$

Ponendo $r = \rho/(\rho - 1)$ si ottiene

$$e(\mathbf{p}, u) = u\left(p_1^{r} + p_2^{r}\right)^{\frac{1}{r}}$$

Relazione tra PMU e PmS

- Relazione tra minimizzione di spesa e massimizzazione dell'utilità:

  (*i*) Se $\mathbf{x}^*$ è ottimo nel PMU quando la ricchezza è m, allora $\mathbf{x}^*$ è ottimo nel PmS quando il livello di utilità desiderato è $u(\mathbf{x}^*)$. La spesa minima in questo PmS è esattamente m, ovvero

  $$e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) \equiv m.$$

  (*ii*) Se $\mathbf{x}^*$ è ottimo nel PmS quando il livello di utilità desiderato è $u > u(\mathbf{0})$, allora $\mathbf{x}^*$ è ottimo nel PMU quando il livello di ricchezza è $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^*$. L'utilità massima in questo PMU è esattamente u, ovvero

  $$v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) \equiv u.$$

  (*iii*) $x(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) \equiv h(\mathbf{p}, u)$ per ogni $\mathbf{p}$ e u

  (*iv*) $h(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) \equiv x(\mathbf{p}, m)$ per ogni $\mathbf{p}$ e m

Relazione tra PMU e PmS

- Le condizioni (i) e (ii) implicano che, per un vettore di prezzi fissato $\mathbf{p}$, le funzioni $e(\mathbf{p}, \cdot)$ e $v(\mathbf{p}, \cdot)$ sono una l'inversa dell'altra.
- La condizione (iii) spiega perché $h(\mathbf{p}, u)$ si chiami domanda compensata: quando i prezzi variano, $h(\mathbf{p}, u)$ fornisce la quantità che il consumatore domanderebbe se il suo reddito fosse aggiustato per mantenere l'utilità u.
- La domanda walrasiana, invece, mantiene fissa la ricchezza monetaria ma lascia variare l'utilità

Relazione tra PMU e PmS

Esempio Funzione di utilità CES $u(x_1, x_2) = \left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}$

(i) Dalla funzione di spesa alla funzione di utilità indiretta. Sia la funzione di spesa $e(\mathbf{p}, u) = u\left(p_1^r + p_2^r\right)^{\frac{1}{r}}$: prendendo un livello di utilità $u = v(\mathbf{p}, m)$ si ha

$$e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) = v(\mathbf{p}, m)\left(p_1^r + p_2^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

Dato che $e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) = m$ si ottiene

$$m = v(\mathbf{p}, m)\left(p_1^r + p_2^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

e risolvendo per $v(\mathbf{p}, m)$

$$v(\mathbf{p}, m) = m\left(p_1^r + p_2^r\right)^{-\frac{1}{r}}$$

Relazione tra PMU e PmS

Esempio Funzione di utilità CES $u(x_1, x_2) = \left(x_1^{\rho} + x_2^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$

(ii) Dalla funzione di utilità indiretta alla funzione di spesa. Sia la funzione di utilità indiretta $v(\mathbf{p}, m) = m\left(p_1^r + p_2^r\right)^{-\frac{1}{r}}$: prendendo un livello di ricchezza pari a $m = e(\mathbf{p}, u)$ si ha

$$v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = e(\mathbf{p}, u)\left(p_1^r + p_2^r\right)^{-\frac{1}{r}}$$

Dato che $v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = u$ si ottiene

$$u = e(\mathbf{p}, u)\left(p_1^r + p_2^r\right)^{-\frac{1}{r}}$$

e risolvendo per $e(\mathbf{p}, u)$

$$e(\mathbf{p}, u) = u\left(p_1^r + p_2^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

Relazione tra PMU e PmS

Esempio Funzione di utilità CES $u(x_1, x_2) = \left(x_1^{\rho} + x_2^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$

(iii) Dalla domanda walrasiana a quella hicksiana. Siano le funzioni di domanda walrasiana

$$x_i(\mathbf{p}, m) = \frac{m p_i^{r-1}}{p_1^r + p_2^r}$$

e la funzione di spesa $e(\mathbf{p}, u) = u\left(p_1^r + p_2^r\right)^{\frac{1}{r}}$: sostituendo $e(\mathbf{p}, u)$ a m si ha

$$\begin{aligned} x_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) &= \frac{e(\mathbf{p}, u)\, p_i^{r-1}}{p_1^r + p_2^r} \\ &= \frac{u\left(p_1^r + p_2^r\right)^{\frac{1}{r}} p_i^{r-1}}{p_1^r + p_2^r} \\ &= \frac{u p_i^{r-1}}{\left(p_1^r + p_2^r\right)^{\frac{r-1}{r}}} = h_i(\mathbf{p}, u) \end{aligned}$$

che è la domanda hicksiana.

Esempio Funzione di utilità CES $u(x_1, x_2) = \left(x_1^{\rho} + x_2^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$

(iv) Dalla domanda hicksiana a quella walrasiana. Siano le funzioni di domanda hicksiana

$$h_i(\mathbf{p}, u) = \frac{u p_i^{r-1}}{\left(p_1^r + p_2^r\right)^{\frac{r-1}{r}}}$$

e la funzione di utilità indiretta $v(\mathbf{p}, m) = m\left(p_1^r + p_2^r\right)^{-\frac{1}{r}}$: sostituendo $v(\mathbf{p}, m)$ a u si ha

$$\begin{aligned} h_i(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) &= \frac{v(\mathbf{p}, m)\, p_i^{r-1}}{\left(p_1^r + p_2^r\right)^{\frac{r-1}{r}}} \\ &= \frac{m\left(p_1^r + p_2^r\right)^{-\frac{1}{r}} p_i^{r-1}}{\left(p_1^r + p_2^r\right)^{\frac{r-1}{r}}} \\ &= \frac{m p_i^{r-1}}{p_1^r + p_2^r} = x_i(\mathbf{p}, m) \end{aligned}$$

Identità di Roy Se $x(\mathbf{p}, m)$ è una funzione di domanda walrasiana, se $v(\mathbf{p}, m)$ è differenziabile e se $(\mathbf{p}, m) \gg \mathbf{0}$, allora

$$x_k(\mathbf{p}, m) = -\frac{\frac{\partial v(\mathbf{p}, m)}{\partial p_k}}{\frac{\partial v(\mathbf{p}, m)}{\partial m}}$$

per ogni $k = 1, ...K$

Lemma di Shephard Se $h(\mathbf{p}, u)$ è una funzione di domanda hicksiana, se $e(\mathbf{p}, u)$ è differenziabile e se $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$, allora

$$h_k(\mathbf{p}, u) = \frac{\partial e(\mathbf{p}, u)}{\partial p_k}$$

per ogni $k = 1, ...K$.

Dimostrazione Identità di Roy Si prenda la funzione di utilità indiretta e si derivi rispetto a p_k

$$\frac{\partial v\left(p,m\right)}{\partial p_k}=\frac{\partial u\left(x\left(p,m\right)\right)}{\partial p_k}=\sum_{l=1}^{K}\frac{\partial u\left(x\left(p,m\right)\right)}{\partial x_l}\frac{\partial x_l\left(p,m\right)}{\partial p_k}.$$

Dalle condizioni del primo ordine del PMU $\frac{\partial u(x(p,m))}{\partial x_l}=\lambda p_l$ quindi sostituendo

$$\frac{\partial v\left(p,m\right)}{\partial p_k}=\lambda\sum_{l=1}^{K}p_l\frac{\partial x_l\left(p,m\right)}{\partial p_k}.$$

Relazione tra PMU e PmS

Dimostrazione Identità di Roy Ma dalla legge di Walras, $p \cdot x(p, m) = m$. Differenziando questa identità rispetto a p_k, si mantiene l'uguaglianza e si ottiene

$$\sum_{l=1}^{K} p_l \frac{\partial x_l(p, m)}{\partial p_k} + x_k(p, m) = 0.$$

Inoltre, il moltiplicatore di Lagrange è dato da $\lambda = \frac{\partial v(p,m)}{\partial m}$ quindi

$$\frac{\partial v(p, m)}{\partial p_k} = -\lambda x_k(p, m) = -\frac{\partial v(p, m)}{\partial m} x_k(p, m)$$

e riordinando

$$x_k(p, m) = -\frac{\frac{\partial v(p,m)}{\partial p_k}}{\frac{\partial v(p,m)}{\partial m}}$$

Dimostrazione Lemma Shephard Sia $e(p,u)$ la funzione di spesa

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_k} = \frac{\partial p \cdot h(p,u)}{\partial p_k} = \sum_{l=1}^{K} p_l \frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k} + h_k(p,u)$$

Dalle condizioni del primo ordine del PmS si ha $p_l = \lambda \frac{\partial u(h(p,u)))}{\partial h_l}$ e sostituendo

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_k} = \sum_{l=1}^{K} \lambda \frac{\partial u(h(p,u)))}{\partial h_l} \frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k} + h_k(p,u).$$

Ma dato che le soluzioni del PmS soddisfano il vincolo, vale l'identità $u(h(p,u))) \equiv u$, e differenziando rispetto a p_k si ha $\sum_{l=1}^{K} \frac{\partial u(h(p,u)))}{\partial h_l} \frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k} = 0$.

Il Teorema dell'inviluppo

- In corrispondenza di un ottimo del PMU (o del PmS), le variazioni nella domanda walrasiana (hicksiana) causate da variazioni nei prezzi non hanno effetti di prim'ordine sulla funzione di utilità indiretta (di spesa).
- Sia $f(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ una funzione da ottimizzare rispetto a $\mathbf{x}$ sotto un vincolo $g(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = c$. Vogliamo tenere conto di una serie di parametri $\mathbf{a}$ che possono entrare o direttamente nella funzione obiettivo o indirettamente nel vincolo.
- Sia $\mathbf{x}(\mathbf{a})$ la soluzione di questo problema
- Sia $M(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ la funzione valore associata al problema di ottimizzazione, ovvero

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = f(\mathbf{x}(\mathbf{a}), \mathbf{a}).$$

- Qual è l'effetto su M di un piccolo cambiamento nel vettore di parametri $\mathbf{a}$?

Il Teorema dell'inviluppo

- Il teorema dell'inviluppo stabilisce che, per ogni a_k

$$\frac{\partial M(\mathbf{x},\mathbf{a})}{\partial a_k} = \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}(\mathbf{a}),\mathbf{a},\lambda)}{\partial a_k} = \frac{\partial f(\mathbf{x}(\mathbf{a}),\mathbf{a})}{\partial a_k} - \lambda \frac{\partial g(\mathbf{x}(\mathbf{a}),\mathbf{a})}{\partial a_k}$$

  quindi l'effetto di una variazione di a_k sulla soluzione $\mathbf{x}(\mathbf{a})$ è trascurabile.

- Sia $v(\mathbf{p}, m)$ la funzione di utilità indiretta. Allora

$$\frac{\partial v(\mathbf{p},m)}{\partial p_k} = -\lambda x_k(\mathbf{p},m) \text{ e } \frac{\partial v(\mathbf{p},m)}{\partial m} = \lambda$$

  da cui discende l'identità di Roy.

- Sia $e(\mathbf{p}, u)$ la funzione di spesa. Allora

$$\frac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial p_k} = h_k(\mathbf{p},u).$$

Relazione tra PMU e PmS

Esempio Funzione di utilità CES $u(x_1, x_2) = \left(x_1^{\rho} + x_2^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$ .Identità di Roy

Sia la funzione di utilità indiretta $v(\mathbf{p}, m) = m\left(p_1^r + p_2^r\right)^{-\frac{1}{r}}$: differenziando rispetto a p_i e m si ha

$$\frac{\partial v(\mathbf{p}, m)}{\partial p_i} = -m\left(p_1^r + p_2^r\right)^{-\frac{1}{r}-1} p_i^{r-1}$$

e

$$\frac{\partial v(\mathbf{p}, m)}{\partial m} = \left(p_1^r + p_2^r\right)^{-\frac{1}{r}}$$

Prendendo il rapporto

$$\begin{aligned} -\frac{\frac{\partial v(\mathbf{p},m)}{\partial p_1}}{\frac{\partial v(\mathbf{p},m)}{\partial m}} &= \frac{m\left(p_1^r + p_2^r\right)^{-\frac{1}{r}-1} p_i^{r-1}}{\left(p_1^r + p_2^r\right)^{-\frac{1}{r}}} \\ &= \frac{m p_i^{r-1}}{\left(p_1^r + p_2^r\right)} \end{aligned}$$

che è la domanda walrasiana.

Relazione tra PMU e PmS

Esempio Funzione di utilità CES $u(x_1, x_2) = \left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}$. Lemma di Shephard.

Sia la funzione di spesa $e(\mathbf{p}, u) = u\left(p_1^r + p_2^r\right)^{\frac{1}{r}}$: differenziando rispetto a p_i si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial e(\mathbf{p}, u)}{\partial p_i} &= u\left(p_1^r + p_2^r\right)^{\frac{1}{r}-1} p_i^{r-1} \\ &= \frac{u p_i^{r-1}}{\left(p_1^r + p_2^r\right)^{\frac{r-1}{r}}} \end{aligned}$$

che è la domanda hicksiana.