Equilibrio economico generale

Produzione

Nadia Burani

Università di Bologna

A.A. 2017/18

In sintesi

- La produzione
  - proprietà degli insiemi di produzione
  - massimizzazione del profitto
- Il consumo
  - massimizzazione dell'utilità
  - il reddito dei consumatori dipende anche da:
    - scelta lavoro/tempo libero
    - assetto proprietario delle imprese
- Esistenza dell'equilibrio generale con produzione
- Efficienza paretiana
- I teoremi fondamentali dell'economia del benessere
  - I fallimenti del mercato

Economie con produzione

- Esiste anche la produzione: le attività economiche possibili sono produzione, consumo e scambio.
- In un'economia con produzione, gli agenti svolgono una pluralità di ruoli:
  - sono i consumatori di beni e servizi finali
  - ottengono reddito offrendo il proprio lavoro ed altri servizi alle imprese
  - sono i proprietari delle imprese stesse.
- Si deve tener conto:
  - della trasformazione di inputs in outputs operata dai produttori
  - dell'offerta di inputs (lavoro) dai consumatori ai produttori
  - della distribuzione dei profitti ai consumatori che possiedono le imprese

Economie con produzione

- Esiste un numero finito K di beni:
  - si denota con x_k la quantità del bene $k = 1, 2, ...K$ "domandata" dai consumatori
  - si denota con y_k la quantità del bene $k = 1, 2, ...K$ "offerta" dalle imprese
- Esiste un numero finito N di consumatori:
  - ciascun consumatore $i = 1, 2, ...N$ è caratterizzato da un insieme di consumo X^i
  - ciascun consumatore ha preferenze descritte dalla funzione di utilità $u^i\left(\mathbf{x}^i\right)$ definita sul proprio consumo
- Esiste un numero finito F di imprese:
  - ciascuna impresa $j = 1, 2, ...F$ è caratterizzata da un insieme di possibilità di produzione Y^j che descrive la sua tecnologia.
  - un vettore a K dimensioni $\mathbf{y}^j \in Y^j$ descrive un piano di produzione per l'impresa j: $y_k^j < 0$ se il bene k è utilizzato come input netto dall'impresa j, mentre $y_k^j > 0$ se il bene k è un output netto dell'impresa j

Le imprese

- Per ciascuna impresa $j \in F$ si suppone che l'insieme delle possibilità di produzione Y^j soddisfi le seguenti proprietà:
  1. (possibilità di inazione) $\mathbf{0} \in Y^j$
  2. (no free meal) $Y^j \cap \mathbb{R}_+^K = \{\mathbf{0}\}$
  3. (free disposal) $Y^j - \mathbb{R}_+^K \subset Y^j$
  4. Y^j è chiuso e limitato
  5. Y^j è strettamente convesso (non sono ammessi rendimenti di scala costanti o crescenti)

Le imprese

- Ciascuna impresa fronteggia un vettore di prezzi $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^K$ e sceglie un piano di produzione per massimizzare i propri profitti

$$\max_{\mathbf{y}^j \in Y^j} \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}^j \tag{PMPI}$$

  - gli inputs netti entrano nei profitti come costi (con segno meno) mentre gli outputs netti entrano come ricavi (con segno più).

- Visto che la funzione obiettivo è continua e che l'insieme Y^j è chiuso e limitato ed esclude rendimenti di scala costanti o crescenti, il PMPI è ben definito e, quando $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$, ammette un'unica soluzione che è continua in $\mathbf{p}$.

Le imprese

- La soluzione del PMPI è denotata con $\mathbf{y}^j(\mathbf{p})$ e descrive la funzione di domanda degli inputs e di offerta degli outputs dell'impresa j.
  - $\mathbf{y}^j(\mathbf{p})$ è omogenea di grado zero nei prezzi
- La funzione valore
$$\pi^j(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}^j(\mathbf{p})$$
è la funzione di profitto dell'impresa j che è ben definita e continua in $\mathbf{p}$.
  - $\pi^j(\mathbf{p})$ è omogenea di primo grado nei prezzi
  - $\pi^j(\mathbf{p})$ sarà sempre non-negativa perché l'impresa può sempre scegliere di non produrre nulla.

Le imprese

- Si considerino le possibilità di produzione a livello dell'economia nel suo complesso
- Non ci sono esternalità nella produzione
- L'insieme delle possibilità di produzione aggregato è dato da

$$Y = \left\{ \mathbf{y} \mid \mathbf{y} = \sum_{j=1}^{F} \mathbf{y}^j \text{ dove } \mathbf{y}^j \in Y^j \right\}$$

- L'insieme Y eredita tutte le proprietà degli insiemi di produzione Y^j delle singole imprese

Le imprese

- Il problema di massimizzazione del profitto aggregato è dato da

$$\max_{\mathbf{y}\in Y} \quad \mathbf{p}\cdot\mathbf{y} \tag{PMPA}$$

- Quando $\mathbf{p} \gg 0$, il PMPA ha una soluzione $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ che è unica e che è continua in $\mathbf{p}$.
- Il piano $\bar{\mathbf{y}}$ massimizza il profitto aggregato se e solo se $\bar{\mathbf{y}}$ può essere decomposto nella somma di F piani di produzione individuali che massimizzano i singoli PMPI:
  - Per ogni vettore di prezzi $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$, si ha $\mathbf{p}\cdot\bar{\mathbf{y}} \geq \mathbf{p}\cdot\mathbf{y}$ per ogni $\mathbf{y} \in Y$ se e solo se $\bar{\mathbf{y}} = \sum_{j=1}^{F} \bar{\mathbf{y}}^j$ e $\mathbf{p}\cdot\bar{\mathbf{y}}^j \geq \mathbf{p}\cdot\mathbf{y}^j$ per ogni $\mathbf{y}^j \in Y^j$ e ogni $j = 1, 2...F$

I consumatori

- I consumatori possono offrire beni e servizi sul mercato:
  - per tener conto dell'offerta di lavoro, si assume che ciascun consumatore sia dotato di un numero fisso (esogeno) di ore disponibili
  - le ore disponibili possono essere consumate come tempo libero oppure offerte come servizi di lavoro.
- L'insieme di consumo deve tener conto dell'offerta di lavoro:
  - un "piano di consumo" $\mathbf{x}^i \in X^i$ ha componenti positive se si tratta di beni e servizi consumati e componenti negative se si tratta di servizi offerti dal consumatore alle imprese.
  - Per ciascun consumatore i, l'insieme di consumo X^i è non-vuoto, chiuso, convesso e limitato.

I consumatori

- Si deve tener conto della distribuzione dei profitti delle imprese ai consumatori:
  - In un'economia in cui esiste la proprietà privata, i consumatori detengono delle quote delle imprese (azioni) e i profitti delle imprese sono distribuiti agli azionisti
  - La partecipazione del consumatore i nell'impresa j gli dà diritto ad una quota o proporzione $\theta^{ij} \in [0, 1]$ dei profitti dell'impresa j.
  - Le quote di ciascuna impresa j devono sommare a 1 su tutti i consumatori, quindi $\sum_{i=1}^{N} \theta^{ij} = 1$

I consumatori

- La ricchezza dei consumatori deriva da due fonti:
  - il valore, ai prezzi di mercato, della dotazione iniziale
  - la partecipazione ai profitti delle imprese.
- Il vincolo di bilancio del consumatore è dato da

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^i \leq \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^i + \sum_{j \in F} \theta^{ij} \pi^j (\mathbf{p}) \right) \equiv m^i (\mathbf{p})$$

- Ciascun agente massimizza la propria utilità sul proprio insieme di bilancio, ovvero ciascun consumatore risolve il problema

$$\begin{aligned} \max_{x^i} \quad & u^i \left(\mathbf{x}^i \right) \\ s.v. \quad & \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^i \leq m^i (\mathbf{p}) \end{aligned} \tag{1}$$

L'equilibrio competitivo

- La soluzione al problema PMU è il vettore delle quantità domandate dall'agente i dati i prezzi $\mathbf{p}$ e la ricchezza $m^i(\mathbf{p})$ e si denota come $\mathbf{x}^i(\mathbf{p}, m^i(\mathbf{p}))$

Funzione di domanda Se le preferenze $\succsim^i$ degli agenti sono razionali, continue, strettamente monotone e strettamente convesse e se i prezzi sono tali che $\mathbf{p} = (p_1, .., p_K) \gg \mathbf{0}$, allora il problema del consumatore (1) ha un'unica soluzione $\mathbf{x}^i(\mathbf{p}, m^i(\mathbf{p}))$ che è continua in $\mathbf{p}$ per tutti i vettori di prezzo $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$.

L'equilibrio competitivo

- Come nel caso di un'economia di solo scambio, si possono definire le funzioni di eccesso di domanda.
- La funzione di eccesso di domanda per il bene k è una funzione a valori reali

$$z_k(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{N} x_k^i\left(\mathbf{p}, m^i(\mathbf{p})\right) - \sum_{j=1}^{F} y_k^j(\mathbf{p}) - \sum_{i=1}^{N} e_k^i$$

- Quando $z_k(\mathbf{p}) > 0$ c'è eccesso di domanda per il bene k mentre quando $z_k(\mathbf{p}) < 0$ c'è eccesso di offerta per il bene k
- La funzione di ecceso di domanda aggregata è il vettore

$$\mathbf{z}(\mathbf{p}) = (z_1(\mathbf{p}), z_2(\mathbf{p}), ..., z_K(\mathbf{p}))$$

- La funzione di ecceso di domanda aggregata è omogenea di grado zero e $\mathbf{z}(\mathbf{p}) = \mathbf{z}(\alpha\mathbf{p})$ per ogni $\alpha > 0$.

L'equilibrio competitivo

- L'equilibrio walrasiano si ottiene quando, in corrispondenza di un certo vettore di prezzi $\mathbf{p}^* \gg 0$, non c'è né eccesso di domanda né eccesso di offerta e $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0}$.

Esistenza Se le preferenze $\succsim^i$ degli agenti e i piani di produzione delle imprese Y^j soddisfano le proprietà elencate e $\mathbf{y} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{e}^i \gg \mathbf{0}$, per un piano di produzione aggregata $\mathbf{y} = \sum_{j \in F} \mathbf{y}^j$, allora esiste almeno un vettore di prezzi $\mathbf{p}^* \gg \mathbf{0}$ tale che $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0}$.

- Visto che la funzione $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ è omogenea di grado zero, importano soltanto i prezzi relativi.

L'economia di Robinson Crusoe

- L'economia di Robinson Crusoe: tutta la produzione e il consumo sono realizzati da un solo agente
- Ci sono due beni nell'economia, il tempo libero l (o il lavoro h) e un bene di consumo y
- RC il consumatore vende ore di lavoro h a RC il produttore che le usa per produrre un bene di consumo y da vendere a RC il consumatore.
- La dotazione iniziale di RC è data da $T = h + l$ ore complessive di tempo e zero unità del bene di consumo y.
- L'insieme di possibilità di produzione è dato da

$$Y = \{(-h, y) \mid 0 \leq h \leq T \text{ e } 0 \leq y \leq h^{\alpha}\}$$

dove la funzione di produzione che trasforma ore di lavoro in unità di bene y è data da $f(h) = h^{\alpha}$ con $\alpha \in (0, 1)$.

L'economia di Robinson Crusoe

- RC il produttore fronteggia il prezzo p per ogni unità di output e il costo w per ogni unità di lavoro e massimizza il profitto

$$\max_{y,h} py - wh.$$

Ma, dato che $y = h^\alpha$, possiamo scrivere

$$\max_{h} ph^\alpha - wh$$

- La c.p.o. per una soluzione interiore è

$$\alpha ph^{-(1-\alpha)} - w = 0$$

L'economia di Robinson Crusoe

- La funzione di domanda dell'input lavoro è

$$h^d(p,w) = \left(\frac{\alpha p}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

- Sostituendo nella funzione di produzione si ottiene

$$y^s(p,w) = \left(\frac{\alpha p}{w}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

che è la funzione di offerta di output.

- La funzione di profitto è pari a

$$\begin{aligned}\pi(p,w) &= py(p,w) - wh(p,w) = p\left(\frac{\alpha p}{w}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - w\left(\frac{\alpha p}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &= p^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1-\alpha)\end{aligned}$$

L'economia di Robinson Crusoe

- Per RC il consumatore, l'insieme di consumo è dato da
$$X = \{(l = T - h, y) \mid 0 \leq h \leq T \text{ e } y \geq 0\}$$
- Le preferenze di RC, definite su X, sono rappresentate dalla funzione di utilità
$$u(y, T - h) = y^{\beta}(T - h)^{1-\beta} \text{ con } \beta \in (0, 1)$$
- RC il consumatore massimizza la propria utilità all'interno del proprio insieme di bilancio:
    - la ricchezza a disposizione di RC è data dalla vendita del proprio lavoro e dai profitti guadagnati come produttore.
- Il PMU di RC è
$$\max_{y,h} \quad y^{\beta}(T - h)^{1-\beta}$$
$$\text{s.v. } py + w(T - h) = \pi(p, w) + wT$$
$$\text{ovvero } py = \pi(p, w) + wh$$

L'economia di Robinson Crusoe

- La Lagrangiana è

$$\mathcal{L}(y, h, \lambda) = y^{\beta}(T - h)^{1-\beta} - \lambda(py - \pi(p, w) - wh)$$

- Le c.p.o. per una soluzione interiore sono

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= \beta y^{\beta - 1}(T - h)^{1-\beta} - \lambda p = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} &= -(1 - \beta) y^{\beta}(T - h)^{-\beta} + \lambda w = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= py - \pi(p, w) - wh = 0
\end{aligned}$$

- Dividendo la prima per la seconda si ottiene

$$\frac{\beta}{(1 - \beta)} \frac{(T - h)}{y} = \frac{p}{w} \Leftrightarrow y = \frac{w}{p} \frac{\beta}{1 - \beta}(T - h) \tag{2}$$

L'economia di Robinson Crusoe

- Sostituendo nel vincolo e risolvendo per h si ha

$$
\begin{aligned}
h &= \frac{1}{w}\left(\frac{w\beta}{1-\beta}(T-h)-\pi(p,w)\right) \\
h^s(p,w) &= \beta T-\pi(p,w)\frac{(1-\beta)}{w} \\
&= \beta T-(1-\beta)(1-\alpha)\left(\frac{p}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

  che è la funzione di offerta di lavoro.

- Sostituendo in (2) si trova la funzione di domanda del bene y

$$
\begin{aligned}
y^d(p,w) &= \frac{w}{p}\frac{\beta}{1-\beta}\left(T-\left(\beta T-(1-\beta)(1-\alpha)\left(\frac{p}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)\right) \\
&= \frac{w}{p}\beta T+\left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\beta(1-\alpha)
\end{aligned}
$$

L'economia di Robinson Crusoe

- In equilibrio si determinano soltanto i prezzi relativi ovvero il salario reale $\omega^* = w/p$ (alternativamente si impone $p = 1$ e si trova w^*)
- Si consideri l'equilibrio sul mercato del bene finale

$$y^s(p,w) = y^d(p,w)$$

ovvero

$$\begin{aligned} \frac{w}{p}\beta T + \left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \beta(1-\alpha) &= \left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ \left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1-\beta(1-\alpha)) &= \frac{w}{p}\beta T \end{aligned}$$

da cui

$$\omega^* = \frac{w}{p} = \alpha^\alpha \left(\frac{\beta T}{(1-\beta(1-\alpha))}\right)^{-(1-\alpha)}$$

L'economia di Robinson Crusoe

- La quantità ottimale di lavoro offerto e domandato è

$$h^* = \frac{\alpha \beta T}{(1 - \beta (1 - \alpha))}$$

- La quantità ottimale di bene finale offerta e domandata è

$$y^* = \left(\frac{\alpha \beta T}{(1 - \beta (1 - \alpha))} \right)^{\alpha}$$

- I profitti dell'impresa sono pari a

$$\pi^* = \left(\frac{\alpha \beta T}{(1 - \beta (1 - \alpha))} \right)^{\alpha} (1 - \alpha)$$

L'economia di Robinson Crusoe e Venerdì

- Supponiamo ora che ci siano due beni finali nell'economia, denotati con y_1 e y_2 e che RC il produttore possa impiegare il suo tempo per produrre entrambi i beni.
- Sia h^R l'ammontare complessivo di ore di lavoro fornite da RC. Sia h_1^R la quantità di ore che RC dedica alla produzione del primo bene e h_2^R la quantità di ore che RC dedica alla produzione del secondo bene, dove

$$h^R = h_1^R + h_2^R \tag{3}$$

- Supponiamo che la tecnologia di RC abbia rendimenti di scala costanti e che le funzioni di produzione relative ai due beni finali siano funzioni lineari delle ore di lavoro dedicate alla produzione di quei beni.
- Le funzioni di produzione dei due beni sono

$$y_1^R = f\left(h_1^R\right) = r_1 h_1^R \text{ e } y_2^R = f\left(h_2^R\right) = r_2 h_2^R \tag{4}$$

con $r_1, r_2 > 0$

L'economia di Robinson Crusoe e Venerdì

- L'*insieme delle possibilità di produzione* di RC è descritto dalle equazioni (3) e (4).
- Per determinare la frontiera delle possibilità di produzione si devono risolvere le equazioni in (4) per h_1^R e h_2^R rispettivamente e sostituire nella (3), ovvero

$$h^R = \frac{y_1^R}{r_1} + \frac{y_2^R}{r_2}$$

  da cui

$$y_2^R = r_2 h^R - \frac{r_2}{r_1} y_1^R$$

  che è una retta nel piano $\left(y_1^R, y_2^R\right)$.
- L'inclinazione (in valore assoluto) della frontiera è r_2 / r_1 e corrisponde al *saggio marginale di trasformazione*, ovvero alla quantità addizionale di bene finale y_2^R che RC può ottenere rinunciando ad una unità di bene y_1^R.

L'economia di Robinson Crusoe e Venerdì

- Supponiamo ora che nell'economia si introduca un secondo lavoratore, Venerdì, che è dotato di una diversa capacità di produrre i due beni finali.
- Sia h^V l'ammontare complessivo di ore di lavoro offerte da V e sia h_1^V la quantità di ore dedicata alla produzione del primo bene e h_2^V la quantità di ore per il secondo bene, dove

$$h^V = h_1^V + h_2^V \tag{5}$$

- Siano le funzioni di produzione di V per i due beni

$$y_1^V = v_1 h_1^V \text{ e } y_2 = v_2 h_2^V \tag{6}$$

con $v_1, v_2 > 0$.
- L'equazione della frontiera delle possibilità di produzione di V è

$$y_2^V = v_2 h^V - \frac{v_2}{v_1} y_1^V$$

con $SMT^V = v_2 / v_1$.

L'economia di Robinson Crusoe e Venerdì

- Supponiamo che valga

$$SMT^R = \frac{r_2}{r_1} > \frac{v_2}{v_1} = SMT^V$$

  ciò significa che RC ha un vantaggio comparato nella produzione del bene 2 mentre V ha un vantaggio comparato nella produzione del bene 1.
    - la produzione del bene 2 è relativamente più intensa nel fattore "lavoro di R" rispetto alla produzione del bene 1.
- L'insieme delle possibilità di produzione aggregato descrive la quantità di ciascun bene che può essere ottenuta da entrambi i naufraghi e presenta un angolo visto che $SMT^R \neq SMT^V$.
- La sua equazione è

$$y_2 = \begin{cases} r_2 h^R + v_2 h^V - \frac{v_2}{v_1} y_1 & \text{per } y_1 \leq v_1 h^V \\ \frac{r_2}{r_1}\left(r_1 h^R + v_1 h^V - y_1\right) & \text{per } y_1 > v_1 h^V \end{cases}$$

L'economia di Robinson Crusoe e Venerdì

- Supponiamo che R e V siano gli azionisti dell'unica impresa che trasforma i due inputs (ore di lavoro di R e V) nei due output (bene 1 e bene 2)
- La quota azionaria di R è denotata con θ^R e quella di V con θ^V.
- Siano p_1 e p_2 i prezzi dei beni finali e siano w^R e w^V i salari orari dei lavoratori impiegati nella produzione dei due beni.
- Il problema di massimizzazione del profitto dell'impresa è

$$\max_{y_1, y_2, h^R, h^V} \qquad p_1 y_1 + p_2 y_2 - w^R h^R - w^V h^V$$

dati i vincoli tecnologici descritti dall'insieme delle possibilità di produzione.

L'economia di Robinson Crusoe e Venerdì

- Supponendo che l'impresa acquisti ottimamente il lavoro dei due agenti, si denoti con $H^* = w^R h^R + w^V h^V$ il costo del lavoro.
- Il profitto può essere espresso come

$$\pi = p_1 y_1 + p_2 y_2 - H^*$$

  Nello spazio (y_1, y_2) l'equazione precedente è rappresentata dalla *retta di isoprofitto*

$$y_2 = \frac{\pi + H^*}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} y_1$$

  la cui pendenza (in valore assoluto) è p_1 / p_2.
- La massimizzazione del profitto implica che l'impresa si situi sulla retta di isoprofitto più alta possibile compatibile con l'insieme delle possibilità produttive aggregato.

L'economia di Robinson Crusoe e Venerdì

- Imponendo una soluzione unica e interiore si trovano le funzioni di offerta degli output che sono

$$(y_1^*, y_2^*) = \left(v_1 h^V, r_2 h^R\right)$$

e valgono per $v_2 / v_1 < p_1 / p_2 < r_2 / r_1$.

- Il bene 1 viene prodotto utilizzando solo il lavoro di V, che ha un vantaggio comparato nella produzione di bene 1, mentre il bene 2 viene prodotto utilizzando solo il lavoro di R, che ha un vantaggio comparato nella produzione di bene 2.
- Il problema di massimizzazione dei profitti dell'impresa diventa ora

$$\max_{h^R, h^V} \quad \left(p_1 v_1 - w^V\right) h^V + \left(p_2 r_2 - w^R\right) h^R$$

- Con rendimenti di scala costanti, il profitto deve essere nullo e si deve avere

$$p_1 v_1 = w^V \quad \text{e} \quad p_2 r_2 = w^R$$

L'economia di Robinson Crusoe e Venerdì

- Si considerino ora le decisioni di consumo.
- R e V massimizzano la propria utilità definita sul consumo dei due beni finali e sul tempo libero, dato l'insieme di bilancio.
- Ciascun consumatore ha una funzione di utilità di tipo Cobb-Douglas.
- Ciascun consumatore ha una dotazione iniziale di T ore di tempo disponibile.
- Il reddito da lavoro di R è pari a $w^R h^R$ e il reddito da lavoro di V è pari a $w^V h^V$.

L'economia di Robinson Crusoe e Venerdì

- Il problema decisionale di Robinson Crusoe è

$$\max_{y_1^R, y_2^R, h^R} \quad \left(y_1^R\right)^{\alpha} \left(y_2^R\right)^{\beta} \left(T - h^R\right)^{1-\alpha-\beta}$$
$$\text{s.v. } \; p_1 y_1^R + p_2 y_2^R = \theta^R \pi\left(p, w\right) + w^R h^R$$

  ma i profitti sono nulli quindi il vincolo diventa

$$p_1 y_1^R + p_2 y_2^R = w^R h^R$$

- La Lagrangiana è

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(y_1^R, y_2^R, h^R, \lambda\right) &= \left(y_1^R\right)^{\alpha} \left(y_2^R\right)^{\beta} \left(T - h^R\right)^{1-\alpha-\beta} \\ &\quad -\lambda\left(p_1 y_1^R + p_2 y_2^R - w^R h^R\right) \end{aligned}$$

L'economia di Robinson Crusoe e Venerdì

- Le c.p.o. per una soluzione interiore sono

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1^R} &= \alpha \left(y_1^R\right)^{\alpha-1} \left(y_2^R\right)^{\beta} \left(T - h^R\right)^{1-\alpha-\beta} - \lambda p_1 = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_2^R} &= \beta \left(y_1^R\right)^{\alpha} \left(y_2^R\right)^{\beta-1} \left(T - h^R\right)^{1-\alpha-\beta} - \lambda p_2 = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^R} &= -\left(1-\alpha-\beta\right) \left(y_1^R\right)^{\alpha} \left(y_2^R\right)^{\beta} \left(T - h^R\right)^{-\alpha-\beta} + \lambda w^R = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= p_1 y_1^R + p_2 y_2^R - w^R h^R = 0
\end{aligned}
$$

- Dividendo la prima per la seconda si ottiene

$$
\frac{\alpha y_2^R}{\beta y_1^R} = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow y_2^R = \frac{\beta}{\alpha}\frac{p_1}{p_2} y_1^R \tag{7}
$$

L'economia di Robinson Crusoe e Venerdì

- Dividendo la prima per la terza si ottiene

$$\frac{\alpha\left(T-h^R\right)}{(1-\alpha-\beta)\,y_1^R}=\frac{p_1}{w^R}\Leftrightarrow h^R=T-\frac{p_1}{w^R}\frac{(1-\alpha-\beta)}{\alpha}y_1^R \qquad (8)$$

- Sostituendo la (7) e la (8) nel vincolo di bilancio si ottiene un'equazione che ha y_1^R come unica variabile e si risolve per

$$y_1^R(p_1,w^R)=\frac{\alpha w^R}{p_1}T$$

- Sostituendo nella (7) si ottiene

$$y_2^R(p_2,w^R)=\frac{\beta w^R}{p_2}T$$

- Sostituendo nella (8) si ottiene

$$h^{R*}=T\left(\alpha+\beta\right).$$

L'economia di Robinson Crusoe e Venerdì

- Il problema decisionale di Venerdì è

$$\max_{y_1^V, y_2^V, h^V} \quad \left(y_1^V\right)^{\gamma}\left(y_2^V\right)^{\delta}\left(T - h^V\right)^{1-\gamma-\delta}$$

$$\text{s.v. } p_1 y_1^V + p_2 y_2^V = w^V h^V$$

- Le soluzioni sono

$$y_1^V\left(p_1, w^V\right) = \frac{\gamma w^V}{p_1} T$$

$$y_2^V\left(p_2, w^V\right) = \frac{\delta w^V}{p_2} T$$

e

$$h^{V*} = T\left(\gamma + \delta\right).$$

L'economia di Robinson Crusoe e Venerdì

- Si imponga $p_2^* = 1$, che implica

$$p_1 v_1 = w^V \quad \text{e} \quad r_2 = w^{R*}$$

- La condizione di equilibrio sul mercato del bene 1

$$y_1^R(p_1, w^R) + y_1^V(p_1, w^V) = v_1 h^{V*}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \frac{\alpha w^R}{p_1} T + \frac{\gamma w^V}{p_1} T &= v_1 T (\gamma + \delta) \\ \alpha \frac{r_2}{p_1} T + \gamma v_1 T &= v_1 T (\gamma + \delta) \end{aligned}$$

da cui

$$p_1^* = \frac{\alpha}{\delta} \frac{r_2}{v_1}$$

- Si noti che la condizione $v_2 / v_1 < p_1 / p_2 < r_2 / r_1$ è soddisfatta per $\alpha r_1 < \delta v_1$ e $\delta v_2 < \alpha r_2$.

L'economia di Robinson Crusoe e Venerdì

- Dato p_1^*, sostituendo in $p_1 v_1 = w^V$, si ottiene

$$w^{V*} = \frac{\alpha}{\delta} r_2$$

- Le domande dei due beni sono

$$\left(y_1^{R*}, y_2^{R*}\right) = (\delta v_1 T, \beta r_2 T)$$

per Robinson e

$$\left(y_1^{V*}, y_2^{V*}\right) = (\gamma v_1 T, \alpha r_2 T)$$

per Venerdì.

L'efficienza Paretiana

- In un'economia con solo scambio, l'efficienza Paretiana è soddisfatta per ogni allocazione che si trova sulla curva dei contratti e che soddisfa la condizione di tangenza tra le curve di indifferenza di ogni coppia di consumatori

$$SMS^{i} = SMS^{i'} \text{ con } i, i' = 1, 2, .., N$$

- Ma questo vale per una data quantità totale di risorse nell'economia pari a (e_1, e_2).
- In un'economia con produzione, la quantità totale di beni presenti nell'economia non è esogena ma può essere scelta all'interno dell'insieme delle possibilità di produzione:
  - è possibile trasformare un bene finale in un altro variando le quantità dei fattori produttivi destinati alla produzione dei diversi beni finali

L'efficienza Paretiana

- Si consideri il caso semplice con solo due agenti $N = 2$ e due beni finali $K = 2$.
- Sia $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ il vettore che denota le quantità dei due beni prodotti (e consumati) nell'economia.
- La funzione di trasformazione $F(y_1, y_2)$ rappresenta l'insieme dei piani di produzione tecnicamente possibili ed è tale che:
  - $F(y_1, y_2) = 0$ se e solo se (y_1, y_2) si trova sulla frontiera dell'insieme delle possibilità di produzione
  - altrimenti $F(y_1, y_2) < 0$
- Se si assume che $F(\cdot)$ sia differenziabile e se $F(y_1, y_2) = 0$, allora

$$SMT_{1,2} \equiv \frac{dy_2}{dy_1} = -\frac{\partial F(\mathbf{y}) / \partial y_1}{\partial F(\mathbf{y}) / \partial y_2}$$

che misura quanto può aumentare la produzione del bene 2 a fronte di una diminuzione di un'unità nella produzione del bene 1.

L'efficienza Paretiana

- Un'allocazione è Pareto-efficiente se massimizza l'utilità di un consumatore dato il livello di utilità dell'altro consumatore.
- In un'economia con produzione un'allocazione è Pareto-efficiente se risolve il problema

$$\begin{aligned} \max_{\left(y_1^1, y_2^1\right), \left(y_1^2, y_2^2\right)} \quad & u^1\left(\mathbf{y}^1\right) \\ \text{s.v.} \quad & u^2\left(\mathbf{y}^2\right) = \overline{u} \\ & F\left(y_1, y_2\right) = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

dove $y_1 = y_1^1 + y_1^2$ e $y_2 = y_2^1 + y_2^2$

- La Lagrangiana del problema è

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(y_1^1, y_2^1, y_1^2, y_2^2\right) &= u^1\left(y_1^1, y_2^1\right) - \lambda\left(u^2\left(y_1^2, y_2^2\right) - \overline{u}\right) \\ & -\mu\left(F\left(y_1, y_2\right) - 0\right) \end{aligned}$$

L'efficienza Paretiana

- Le c.p.o. sono le seguenti

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1^1} = \frac{\partial u^1}{\partial y_1^1} - \mu \frac{\partial F}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial y_1^1} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_2^1} = \frac{\partial u^1}{\partial y_2^1} - \mu \frac{\partial F}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial y_2^1} = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1^2} = -\lambda \frac{\partial u^2}{\partial y_1^2} - \mu \frac{\partial F}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial y_1^2} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_2^2} = -\lambda \frac{\partial u^2}{\partial y_2^2} - \mu \frac{\partial F}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial y_2^2} = 0 \tag{13}$$

L'efficienza Paretiana

- Dalle c.p.o., dividendo la (10) per la (11), si ottiene

$$SMS^1_{1,2} \equiv \frac{\frac{\partial u^1}{\partial y^1_1}}{\frac{\partial u^1}{\partial y^1_2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y_1}}{\frac{\partial F}{\partial y_2}} \equiv SMT_{1,2}$$

  e dividendo la (12) per la (13) si ha

$$SMS^2_{1,2} \equiv \frac{\frac{\partial u^2}{\partial y^2_1}}{\frac{\partial u^2}{\partial y^2_2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y_1}}{\frac{\partial F}{\partial y_2}} \equiv SMT_{1,2}$$

  ovvero $SMS^1 = SMS^2 = SMT$.

- Il saggio al quale ciascun consumatore è disposto a scambiare un bene per un altro mantendo costante la propria soddisfazione è uguale al saggio al quale è tecnicamente possibile trasformare un bene in un altro.

I teoremi dell'economia del benessere

- Implicazioni di natura distributiva dell'equilibrio walrasiano.
- Sia $\mathbf{p}^*$ un equilibrio walrasiano di un'economia con produzione e con dotazione iniziale $\mathbf{e}$. La coppia $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, con $\mathbf{x} = \left(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, .., \mathbf{x}^N\right)$, $\mathbf{x}^i \in X^i$ per ogni $i \in N$, e $\sum_{i \in N} \mathbf{x}^i \in X$ e con $\mathbf{y} = \left(\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, .., \mathbf{y}^F\right)$, $\mathbf{y}^j \in Y^j$ per ogni $j \in F$, e $\sum_{j \in F} \mathbf{y}^j \in Y$, è detta *allocazione walrasiana di equilibrio* se soddisfa le seguenti proprietà:
  1. $\mathbf{x}^i \in B^i(\mathbf{p}^*)$ e $\mathbf{x}^i \succsim^i \widetilde{\mathbf{x}}^i$ per ogni $\widetilde{\mathbf{x}}^i \in B^i(\mathbf{p}^*)$ e ogni $i \in N$ (il paniere di consumo di ciascun consumatore è il preferito nell'insieme di bilancio ai prezzi $\mathbf{p}^*$)
  2. $\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{y}^j \geq \mathbf{p}^* \cdot \widetilde{\mathbf{y}}^j$ per ogni $\widetilde{\mathbf{y}}^j \in Y^j$ e ogni $j \in F$ (il piano di produzione di ciascuna impresa massimizza il profitto ai prezzi $\mathbf{p}^*$ nell'insieme delle possibilità di produzione)
  3. $\sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}^i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{e}^i + \sum_{j=1}^{F} \mathbf{y}^j$ (il consumo e la produzione aggregati sono realizzabili e compatibili per l'economia)

I teoremi dell'economia del benessere

Primo Teorema dell'Economia del Benessere Sia $\mathbf{p}^*$ un equilibrio walrasiano di un'economia con produzione e con dotazione iniziale $\mathbf{e}$ e sia $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ un'allocazione walrasiana di equilibrio. Allora $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ è Pareto-efficiente.

Secondo Teorema dell'Economia del Benessere Siano le preferenze $\succsim^i$ degli agenti razionali, continue, strettamente monotone e strettamente convesse. Si consideri un'economia con produzione, con dotazione iniziale $\mathbf{e}$ e tale che l'insieme delle possibilità di produzione aggregato Y sia convesso. Si supponga che $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ sia Pareto-efficiente e tale che $\sum_{i \in N} \bar{\mathbf{x}}^i \gg \mathbf{0}$ e $\sum_{j \in F} \bar{\mathbf{y}}^j \gg \mathbf{0}$. Allora $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ è un'allocazione walrasiana di equilibrio per un qualche vettore di prezzi $\bar{\mathbf{p}}$.

I fallimenti del mercato

- Il Primo Teorema stabilisce che la concorrenza perfetta permette di raggiungere allocazioni delle risorse che sono sempre Pareto-efficienti:
  - la concorrenza perfetta è un termine di paragone che consente di stabilire la bontà della distribuzione delle risorse in un'economia di mercato
- Ogni tipo di inefficienza in un'economia di mercato (e quindi ogni tipo di intervento pubblico sul mercato per aumentare l'efficienza) deve essere riconducibile ad una violazione delle ipotesi su cui si fonda il Primo Teorema
- Quando un' economia di mercato si allontana dall'ideale della concorrenza perfetta e non produce allocazioni Pareto-efficienti, si parla di *fallimenti del mercato*

I fallimenti del mercato

- Le cause dei fallimenti del mercato sono:
  1. esternalità e beni pubblici:
     - le azioni di un agente influenzano direttamente l'utilità o gli insiemi delle possibilità produttive di altri agenti
     - si viola l'ipotesi della completezza dei mercati perché ci sono beni o mali che non hanno un mercato e un prezzo
  2. potere di mercato:
     - alcuni agenti non prendono il prezzo come un dato
  3. asimmetrie informative:
     - si viola l'ipotesi della completezza dei mercati perché se le caratteristiche dei beni o servizi scambiati non sono osservabili da tutti gli agenti, non possono esistere diversi mercati per beni che hanno diverse caratteristiche.