Equilibrio economico generale

Puro scambio

Nadia Burani

Università di Bologna

A.A. 2017/18

In sintesi

- Economie di puro scambio
- L'efficienza paretiana (scambio attraverso il baratto)
    - la scatola di Edgeworth: 2 agenti, 2 beni
    - il core
- L'equilibrio concorrenziale (scambio attraverso il mercato, con prezzi)
    - esistenza dell'equilibrio
    - proprietà dell'equilibrio
- I teoremi fondamentali dell'economia del benessere

Economie di puro scambio

- Non esiste produzione: le uniche attività economiche sono consumo e scambio
- Esiste un numero finito K di beni :
  - si denota con x_k la quantità del bene $k = 1, 2, ...K$
- Esiste un numero finito N di agenti:
  - ciascun agente $i = 1, 2, ...N$ possiede una certa dotazione iniziale (un certo ammontare di beni di consumo) esogena
  - si denota con $\mathbf{e}^i$ il vettore delle dotazioni iniziali di ciascun bene per l'agente i

$$\mathbf{e}^i = \begin{bmatrix} e_1^i \\ e_2^i \\ \vdots \\ e_K^i \end{bmatrix}$$

dove e_k^i denota la dotazione inziale del bene k dell'agente i ed $e_k^i \geq 0$ $\forall i, k$.

Economie di puro scambio

- Ciascun agente ha delle preferenze $\succsim^i$ ben definite sui beni esistenti:
  - ciascun agente è interessato soltanto al proprio benessere
  - ciascun agente trae soddisfazione soltanto dal proprio consumo dei beni: le preferenze sono definite su $\mathbf{x}^i$

Economie di puro scambio: l'efficienza Paretiana

- L'unica forma di interazione tra agenti economici è lo scambio sotto forma di baratto.
- Esiste la proprietà privata quindi ciascuno scambio deve essere volontario e non coercitivo.
- Lo scambio volontario è l'unico modo attraverso cui le risorse dell'economia possono essere redistribuite tra gli agenti a partire dalle dotazioni iniziali che sono esogene.
- L'obiettivo è quello di definire un "equilibrio" del processo di scambio volontario:
    - esiste una soluzione al problema della distribuzione delle risorse in questa economia?

Economie di puro scambio: l'efficienza Paretiana nella scatola di Edgeworth

- Si consideri un modello semplificato in cui ci sono solo due agenti $N = 2$ e due beni $K = 2$.
- Siano $\mathbf{e}^1 = \left(e_1^1, e_2^1\right)$ la dotazione iniziale dell'agente 1 e $\mathbf{e}^2 = \left(e_1^2, e_2^2\right)$ la dotazione iniziale dell'agente 2
- L'ammontare totale di beni disponibili in questa economia è dato da

$$\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^2 = \left(e_1^1 + e_1^2, e_2^1 + e_2^2\right)$$

- Gli aspetti essenziali di questa economia possono essere rappresentati attraverso la *scatola di Edgeworth*:
  - la base della scatola è data dalla quantità totale di bene 1 $e_1 = e_1^1 + e_1^2$
  - l'altezza della scatola è data dalla quantità totale di bene 2 $e_2 = e_2^1 + e_2^2$
  - ciascun punto nella scatola ha quattro coordinate e rappresenta una possibile allocazione (distribuzione) di risorse tra i due agenti:
    - dato $\mathbf{x}^1 = \left(x_1^1, x_2^1\right)$, si ha $\mathbf{x}^2 = \left(x_1^2, x_2^2\right) = \left(e_1 - x_1^1, e_2 - x_2^1\right)$

Economie di puro scambio: l'efficienza Paretiana nella scatola di Edgeworth

- Ciascun agente i ha preferenze $\succsim^i$ sui panieri $\mathbf{x}^i$ che sono rappresentate dalle curve di indifferenza usuali.
- Per qualsiasi punto nella scatola passa solo una curva di indifferenza per ciascun agente
- Dato il vettore delle dotazioni inziali $\mathbf{e}$, si vogliono trovare le allocazioni $\mathbf{x}$ che possiamo definire di equilibrio in questa economia di puro scambio.
- Il luogo geometrico dei punti di tangenza tra le curve di indifferenza dei due agenti è detto *curva dei contratti*
  - per ciascun punto fuori dalla curva dei contratti, le curve di indifferenza dei due agenti si intersecano

Economie di puro scambio: l'efficienza Paretiana nella scatola di Edgeworth

- Dato il vettore delle dotazioni iniziali **e**, le allocazioni di equilibrio devono soddisfare le seguenti proprietà:
  - (*i*) devono appartenere alla scatola di Edgeworth, ovvero devono essere realizzabili (*feasible*) e $x_1^1 + x_1^2 = e_1$ e $x_2^1 + x_2^2 = e_2$
  - (*ii*) devono appartenere all'area a forma di lente delimitata dalle due curve di indifferenza passanti per la dotazione iniziale **e** :
    - ciascun agente deve essere almeno altrettanto soddisfatto rispetto al consumo della dotazione iniziale
    - qualsiasi allocazione a sinistra della curva di indifferenza dell'agente 1 passante per **e** sarebbe bloccata dall'agente 1
    - qualsiasi allocazione a destra della curva di indifferenza dell'agente 2 passante per **e** sarebbe bloccata dall'agente 2

Economie di puro scambio: l'efficienza Paretiana nella scatola di Edgeworth

- Dato il vettore delle dotazioni iniziali **e**, le allocazioni di equilibrio devono soddisfare le seguenti proprietà:

  (*iii*) devono appartenere alla curva dei contratti:

  - qualsiasi allocazione che non appartiene alla curva dei contratti è bloccata da un'altra allocazione all'interno di un'area a forma di lente dove sono possibili scambi mutuamente vantaggiosi.

Economie di puro scambio: l'efficienza Paretiana nella scatola di Edgeworth

- Dato il vettore delle dotazioni iniziali $\mathbf{e}$, le allocazioni di equilibrio devono giacere sul segmento della curva dei contratti racchiuso nell'area a forma di lente delimitata dalle curve di indifferenza passanti per $\mathbf{e}$.
- Le allocazioni di equilibrio sono *Pareto-efficienti*

Definizione un'allocazione $\mathbf{x}$ è Pareto-efficiente in senso forte se non esiste alcuna altra allocazione $\mathbf{y}$ tale che $\mathbf{y}^i \succsim^i \mathbf{x}^i$ per tutti gli agenti i con $\mathbf{y}^j \succ^j \mathbf{x}^j$ per almeno un agente j.

Definizione un'allocazione $\mathbf{x}$ è Pareto-efficiente in senso debole se non esiste alcuna altra allocazione $\mathbf{y}$ tale che $\mathbf{y}^i \succ^i \mathbf{x}^i$ per tutti gli agenti i.

Le due definizioni sono equivalenti quando le preferenze sono strettamente monotone e continue.

Economie di puro scambio: l'efficienza Paretiana nella scatola di Edgeworth

Dimostrazione (a) Se un'allocazione è Pareto-efficiente in senso forte, allora lo è anche in senso debole

$$PEF \rightarrow PED \Longleftrightarrow \neg PED \rightarrow \neg PEF$$

Se esiste un'allocazione $\mathbf{y}$ tale che $\mathbf{y}^i \succ^i \mathbf{x}^i$ per tutti gli agenti i allora vale anche che $\mathbf{y}^i \succsim^i \mathbf{x}^i$ per tutti gli agenti i con $\mathbf{y}^j \succ^j \mathbf{x}^j$ per almeno un agente j.

(b) Se un'allocazione è Pareto-efficiente in senso debole, lo è anche in senso forte

$$PED \rightarrow PEF \Longleftrightarrow \neg PEF \rightarrow \neg PED.$$

Se esiste un'allocazione $\mathbf{y}$ tale che $\mathbf{y}^i \succsim^i \mathbf{x}^i$ per tutti gli agenti i con $\mathbf{y}^j \succ^j \mathbf{x}^j$ per almeno un agente j, allora per continuità $\alpha \mathbf{y}^j \succ^j \mathbf{x}^j$ per $\alpha < 1$ ma vicino a 1 e per monotonicità $\frac{(1-\alpha)\mathbf{y}^j}{N-1} + \mathbf{y}^i \succ \mathbf{x}^i$ per tutti gli agenti $i \neq j$.

Economie di puro scambio: l'efficienza Paretiana nella scatola di Edgeworth

- Supponendo che le preferenze $\succsim^i$ dei due agenti siano rappresentate dalla funzione di utilità $u^i\left(\mathbf{x}^i\right)$, l'insieme delle allocazioni Pareto-efficienti è dato dalla soluzione del problema seguente:

$$\begin{aligned} \max_{\left(x_1^1, x_2^1\right), \left(x_1^2, x_2^2\right)} \quad & u^1\left(\mathbf{x}^1\right) \\ \text{s.v.} \quad & u^2\left(\mathbf{x}^2\right) \geq \overline{u} \\ & x_1^1 + x_1^2 = e_1 \\ & x_2^1 + x_2^2 = e_2 \end{aligned} \tag{1}$$

La Lagrangiana del problema è

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2\right) &= u^1\left(x_1^1, x_2^1\right) - \lambda\left(u^2\left(x_1^2, x_2^2\right) - \overline{u}\right) \\ & -\mu_1\left(x_1^1 + x_1^2 - e_1\right) - \mu_2\left(x_2^1 + x_2^2 - e_2\right) \end{aligned}$$

Economie di puro scambio: l'efficienza Paretiana nella scatola di Edgeworth

- Le c.p.o. sono le seguenti

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1^1} &= \frac{\partial u^1}{\partial x_1^1} - \mu_1 = 0 && (2)\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2^1} &= \frac{\partial u^1}{\partial x_2^1} - \mu_2 = 0 && (3)\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1^2} &= -\lambda \frac{\partial u^2}{\partial x_1^2} - \mu_1 = 0 && (4)\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2^2} &= -\lambda \frac{\partial u^2}{\partial x_2^2} - \mu_2 = 0 && (5)
\end{aligned}
$$

a cui si aggiungono le derivate rispetto a λ, μ_1 e μ_2 (ovvero i vincoli).

Economie di puro scambio: l'efficienza Paretiana nella scatola di Edgeworth

- Dalle c.p.o., dividendo la (2) per la (3) e la (4) per la (5) si ottiene

$$SMS^1 = \frac{\frac{\partial u^1}{\partial x_1^1}}{\frac{\partial u^1}{\partial x_2^1}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \qquad \text{e} \qquad SMS^2 = \frac{\frac{\partial u^2}{\partial x_1^2}}{\frac{\partial u^2}{\partial x_2^2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

  ovvero

$$SMS^1 = SMS^2$$

  che è la condizione di **tangenza tra le curve di indifferenza dei due agenti**.
- I moltiplicatori μ_1 e μ_2 sono detti *prezzi di efficienza*.

Economie di puro scambio: l'efficienza Paretiana nella scatola di Edgeworth

Esempio Siano le funzioni di utilità dei due agenti

$$u^1\left(\mathbf{x}^1\right) = \left(x_1^1\right)^2 x_2^1 \text{ e } u^2\left(\mathbf{x}^2\right) = \min\left\{x_1^2, x_2^2\right\}$$

e sia la dotazione iniziale $\mathbf{e}^1 = (2,5)$ e $\mathbf{e}^2 = (8,5)$. Come si ottiene la curva dei contratti? Per l'agente 1

$$SMS^1 = \frac{\frac{\partial u^1}{\partial x_1^1}}{\frac{\partial u^1}{\partial x_2^1}} = \frac{2x_1^1 x_2^1}{\left(x_1^1\right)^2} = \frac{2x_2^1}{x_1^1}$$

mentre per l'agente 2 i due beni si consumano in proporzione fissa tale che $x_1^2 = x_2^2$. Visto che $x_1^1 = 10 - x_1^2$ e che $x_2^1 = 10 - x_2^2$, si ha anche $x_1^1 = x_2^1$ e quindi lungo la curva dei contratti $SMS^1 = 2$. Le allocazioni di equilibrio giacciono sulla porzione di curva dei contratti compresa tra il punto $\left(\sqrt[3]{20}, \sqrt[3]{20}\right) = (2.7144, 2.7144)$ e il punto $(5,5)$.

Economie di puro scambio: l'efficienza Paretiana

- Si consideri ora il caso più generale con K beni ed N agenti.
- Sia $\mathbf{e} = \left(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, ..., \mathbf{e}^N\right)$ il vettore delle dotazioni iniziali $\mathbf{e}^i$ di ciscun agente i nell'economia.
- Sia $\mathbf{x} = \left(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^N\right)$ un'allocazione, dove $\mathbf{x}^i$ è un vettore a K componenti che descrive il consumo dell'agente $i \in N$.
- Come si estendono al caso generale le proprietà delle allocazioni di equilibrio?
- Le allocazioni di equilibrio devono essere realizzabili, ovvero devono appartenere all'insieme

$$F(\mathbf{e}) = \left\{ \mathbf{x} \mid \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}^i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{e}^i \right\}$$

Economie di puro scambio: l'efficienza Paretiana

- Le allocazioni di equilibrio devono garantire almeno la stessa soddisfazione della dotazione iniziale, ovvero

$$\mathbf{x}^i \succsim^i \mathbf{e}^i \text{ per ogni } i = 1, ..., N$$

- Le allocazioni di equilibrio non devono essere bloccate da un singolo agente o da una coalizione di individui.

Bloccare un'allocazione Sia $S \subseteq N$ una coalizione di agenti. S può migliorare l'allocazione $\mathbf{x} \in F(\mathbf{e})$ se esiste un'altra allocazione realizzabile $\mathbf{y} \in F(\mathbf{e})$ tale che

1. $\sum_{i \in S} \mathbf{y}^i = \sum_{i \in S} \mathbf{e}^i$
2. $\mathbf{y}^i \succ^i \mathbf{x}^i$ per ogni $i \in S$.

Se esistono una tale coalizione S e allocazione $\mathbf{y}$, allora si dice che la coalizione S blocca l'allocazione $\mathbf{x}$ per mezzo dell'allocazione alternativa $\mathbf{y}$.

Economie di puro scambio: l'efficienza Paretiana

Equilibrio L'allocazione $\mathbf{x}$ è una soluzione al problema dello scambio se:

1. $\mathbf{x} \in F(\mathbf{e})$
2. $\mathbf{x}^i \succsim^i \mathbf{e}^i$ per ogni $i = 1, ..., N$
3. Per tutte le allocazioni $\mathbf{y} \in F(\mathbf{e})$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, esiste una coalizione $S \subseteq N$ che blocca $\mathbf{y}$.

Core Il core di un'economia di puro scambio con dotazione iniziale $\mathbf{e}$ è l'insieme di tutte le allocazioni realizzabili che non possono essere bloccate, ovvero

$$C(\mathbf{e}) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \text{ soddifa le condizioni 1-3 }\}$$

Teorema Se $\mathbf{x} \in C(\mathbf{e})$, allora $\mathbf{x}$ è Pareto-efficiente.

Dimostrazione Se $\mathbf{x}$ non fosse Pareto-efficiente ci sarebbe un'allocazione alternativa $\mathbf{y} \in F(\mathbf{e})$ tale che $\mathbf{y}^i \succ \mathbf{x}^i$ da tutti gli agenti $i \in N$ e quindi la grande coalizione $S = N$ bloccherebbe $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}$ non sarebbe nel core.

Economie di puro scambio: l'equilibrio competitivo

- Si consideri ora un sistema economico più sofisticato in cui:
  - esiste un mercato per ogni bene rilevante (completezza dei mercati)
  - tutte le transazioni tra individui avvengono sui mercati dei vari beni
  - in ciascun mercato gli scambi avvengono al prezzo prevalente su quel mercato
- In un'economia di mercato perfettamente competitiva, ciascun agente, comportandosi da venditore o acquirente, è individualmente insignificante su ciascun mercato e non è in grado di influenzare i prezzi prevalenti (price taking).
- L'equilibrio in questa economia di mercato è raggiunto quando le decisioni di acquisto e di vendita di tutti gli agenti ai prezzi prevalenti sono compatibili su tutti i mercati simultaneamente.

Economie di puro scambio: l'equilibrio competitivo

- Il vettore dei prezzi di mercato per i K beni è dato da $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ...p_K)$
- Le preferenze $\succsim^i$ di ciascun agente sono rappresentate da una funzione di utilità definita sul consumo dell'agente stesso $u^i(\mathbf{x}^i)$
  - si assume che le preferenze siano razionali, continue, strettamente monotone e strettamente convesse
- Ciascun agente massimizza la propria utilità sul proprio insieme di bilancio, ovvero ciascun consumatore risolve il problema

$$\max_{\mathbf{x}^i \geq \mathbf{0}} \quad u^i(\mathbf{x}^i) \qquad (6)$$
$$s.v. \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^i \leq m^i$$

dove la ricchezza dell'agente i è data da

$$m^i = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^i.$$

- La **ricchezza del consumatore** non è più data esogenamente ma è uguale al **valore di mercato della sua dotazione iniziale.**

- La soluzione al problema PMU è il vettore delle quantità domandate dall'agente i dati i prezzi $\mathbf{p}$ e la ricchezza $m^i = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^i$ e si denota come $\mathbf{x}^i\left(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^i\right) = \mathbf{x}^i\left(\mathbf{p}, m^i\right)$

Funzione di domanda Se le preferenze $\succsim^i$ degli agenti sono razionali, continue, strettamente monotone e strettamente convesse e se i prezzi sono tali che $\mathbf{p} = (p_1, .., p_K) \gg \mathbf{0}$, allora il problema del consumatore PMU ha un'unica soluzione $\mathbf{x}^i\left(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^i\right)$ che è continua in $\mathbf{p}$ per tutti i vettori di prezzo $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$.

Economie di puro scambio: l'equilibrio competitivo

- Si consideri il caso semplice con due soli agenti $N = 2$ e due beni $K = 2$.
- Gli insiemi di bilancio degli agenti si rappresentano nella scatola di Edgeworth tracciando una retta con pendenza $-(p_1 / p_2)$ passante per la dotazione inziale $\mathbf{e}$.
- Soltanto le allocazioni che si trovano sulla retta di bilancio sono ammissibili per entrambi i consumatori simultaneamente ai prezzi (p_1, p_2)

Economie di puro scambio: l'equilibrio competitivo

- Si consideri il caso semplice con due soli agenti $N = 2$ e due beni $K = 2$.
- Si consideri la soluzione al problema PMU per l'agente 1 dati i prezzi $\mathbf{p}$: deve essere soddisfatta la condizione di tangenza tra la curva di indifferenza più alta possibile e la retta di bilancio.
- Facendo variare il vettore dei prezzi $\mathbf{p}$, la retta di bilancio ruota intorno alla dotazione iniziale $\mathbf{e}$ e le quantità domandate dal consumatore 1 tracciano la *curva prezzo-consumo* CPC^1 :
    - La CPC^1 passa per il punto $\mathbf{e}$: deve essere tangente ad una curva di indifferenza del consumatore 1 in corrispondenza della dotazione iniziale.
    - Ogni punto sulla CPC^1 è debolmente preferito dall'agente 1 a $\mathbf{e}^1$.

Economie di puro scambio: l'equilibrio competitivo

- La domanda di mercato di un qualsiasi bene k sarà la somma delle quantità domandate da ciascun agente di quel bene.
- L'offerta di mercato di un qualsiasi bene k sarà la somma delle quantità offerte individualmente:
  - possiamo interpretare la dotazione di ciascun bene e di ciascun agente e_k^i come la quantità del bene k che è inelasticamente offerta sul mercato.
- Ci sono K mercati che sono tra loro interdipendenti perché la domanda e l'offerta di ciascun bene dipendono dal vettore di prezzi di tutti i beni.
- L'economia con K mercati può essere descritta attraverso un singolo vettore a K dimensioni che rappresenta *l'eccesso di domanda* di tutti i beni.

- La *funzione di eccesso di domanda per il bene k* è una funzione a valori reali

$$z_k(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{N} x_k^i\left(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^i\right) - \sum_{i=1}^{N} e_k^i$$

- Quando $z_k(\mathbf{p}) > 0$ c'è eccesso di domanda per il bene k, mentre quando $z_k(\mathbf{p}) < 0$ c'è eccesso di offerta per il bene k
- La *funzione di eccesso di domanda aggregata* è il vettore

$$\mathbf{z}(\mathbf{p}) = \left(z_1(\mathbf{p}), z_2(\mathbf{p}), ..., z_K(\mathbf{p})\right)$$

Proprietà dell'eccesso di domanda Se le preferenze $\succsim^i$ degli agenti sono razionali, continue, strettamente monotone e strettamente convesse, allora la funzione di eccesso di domanda $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ è continua in $\mathbf{p}$ per tutti i vettori di prezzo $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$ e soddisfa le seguenti proprietà:

1. Omogeneità di grado zero: $\mathbf{z}(\alpha\mathbf{p}) = \mathbf{z}(\mathbf{p})$ per ogni $\alpha > 0$
2. Legge di Walras: $\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}) = 0$ per ogni $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$.

Dimostrazione Omogeneità di grado zero: discende dall'omogeneità di grado zero della domanda di ciascun bene k. Anche l'eccesso di domanda del bene k e l'eccesso di domanda aggregata godrà della stessa proprietà.

Legge di Walras: dice che il valore dell'eccesso di domanda è sempre nullo, per ogni vettore di prezzi $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$. Ciò deriva dal fatto che, se le preferenze dei consumatori sono strettamente monotone, per ciascun consumatore i il vincolo di bilancio vale con uguaglianza

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^i = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^i$$

ovvero

$$\sum_{k=1}^{K} p_k \left(x_k^i \left(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^i \right) - e_k^i \right) = 0 \tag{7}$$

Dimostrazione Legge di Walras: Sommando la (7) su tutti gli individui

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} p_k \left(x_k^i \left(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^i \right) - e_k^i \right) = 0$$

rovesciando l'ordine delle sommatorie

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{N} p_k \left(x_k^i \left(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^i \right) - e_k^i \right) &= 0 \\
\sum_{k=1}^{K} p_k \left(\sum_{i=1}^{N} x_k^i \left(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^i \right) - \sum_{i=1}^{N} e_k^i \right) &= 0 \\
\sum_{k=1}^{K} p_k z_k \left(\mathbf{p} \right) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{z} \left(\mathbf{p} \right) &= 0
\end{aligned}$$

Economie di puro scambio: l'equilibrio competitivo

- Implicazioni della legge di Walras in un'economia con solo due beni:

$$p_1 z_1 (p_1, p_2) + p_2 z_2 (p_1, p_2) = 0.$$

  - Se i prezzi sono strettamente positivi e c'è eccesso di domanda nel mercato del bene 1, ovvero $z_1 (p_1, p_2) > 0$, allora ci deve essere eccesso di offerta nel mercato del bene 2, ovvero $z_2 (p_1, p_2) < 0$.
  - Se il mercato del bene 1 è in equilibrio ai prezzi (p_1, p_2), ovvero $z_1 (p_1, p_2) = 0$, allora anche il mercato del bene 2 è in equilibrio e $z_2 (p_1, p_2) = 0$.

- Implicazioni della legge di Walras in un'economia con K beni:
  - Se tutti prezzi sono strettamente positivi e c'è eccesso di domanda nel mercato di un bene, ci deve essere un eccesso di offerta nei mercati degli altri beni che compensa esattamente l'eccesso di domanda.
  - Se, in corrispondenza di un certo vettore di prezzi, $K - 1$ mercati sono in equilibrio allora anche nel mercato $K-$esimo ci deve essere equilibrio.

Economie di puro scambio: l'equilibrio competitivo

- L'economia di mercato è in equilibrio generale quando, in corrispondenza di un certo vettore di prezzi $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$, non c'è né eccesso di domanda né eccesso di offerta e $\mathbf{z}(\mathbf{p}) = 0$.

Equilibrio Walrasiano Un vettore di prezzi $\mathbf{p}^* \gg \mathbf{0}$ è un equilibrio walrasiano se $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0}$.

Esistenza Se le preferenze $\succsim^i$ degli agenti sono razionali, continue, strettamente monotone e strettamente convesse e se la dotazione aggregata di ciascun bene è strettamente positiva, ovvero se $\sum_{i=1}^{N} \mathbf{e}^i \gg \mathbf{0}$, allora esiste almeno un vettore di prezzi $\mathbf{p}^* \gg \mathbf{0}$ tale che $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0}$.

- Dall'omogeneità di grado zero della funzione di eccesso di domanda sappiamo che se $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0}$ anche $\mathbf{z}(\alpha\mathbf{p}^*) = \mathbf{0}$ per ogni $\alpha > 0$.
    - Se esiste un vettore di prezzi $\mathbf{p}^* \gg \mathbf{0}$ in corrispondenza del quale si ha equilibrio su tutti i mercati, allora anche in corrispondenza del vettore di prezzi $\alpha\mathbf{p}^*$ tutti i mercati si svuotano
- Solo i prezzi relativi sono importanti nel determinare l'equilibrio generale e, senza perdita di generalità, si può porre $p_k = 1$ per qualche $k = 1, .., K$
    - si può prendere il bene k come numerario.

Economie di puro scambio: l'equilibrio competitivo

- Si consideri il caso semplice con due soli agenti $N = 2$ e due beni $K = 2$.
- Un equilibrio walrasiano nella scatola di Edgeworth è tale che, in corrispondenza dell'allocazione $\mathbf{x}^*$, le curve di indifferenza dei due agenti sono entrambe tangenti alla retta di bilancio passante per $\mathbf{e}$.
- Un equilibrio walrasiano nella scatola di Edgeworth è tale che le curve prezzo-consumo dei due agenti si intersecano in corrispondenza di un punto $\mathbf{x}^*$ diverso da $\mathbf{e}$:
  - i prezzi di equilibrio sono tali che la retta di bilancio passa attraverso i due punti $\mathbf{x}^*$ ed $\mathbf{e}$.
- Anche se l'equilibrio walrasiano esiste, non è detto che sia unico: le curve prezzo-consumo dei due agenti si possono intersecare diverse volte.

Esempio Si consideri un'economia con due beni e due agenti e siano le funzioni di utilità (identiche) dei due agenti di tipo CES

$$u^i\left(x_1^i, x_2^i\right) = \left(\left(x_1^i\right)^\rho + \left(x_2^i\right)^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}} \text{ per } i = 1, 2$$

Le dotazioni iniziali sono $\mathbf{e}^1 = (1, 0)$ e $\mathbf{e}^2 = (0, 1)$. La funzione di domanda del bene $k = 1, 2$ da parte dell'agente $i = 1, 2$ è data da

$$x_k^i\left(p_1, p_2, m^i\right) = \frac{p_k^{\frac{1}{\rho-1}} m^i}{p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}$$

dove m^i è la ricchezza esogena dell'agente i. In questo contesto $m^1 = p_1 e_1^1 + p_2 e_2^1 = p_1$ e $m^2 = p_1 e_1^2 + p_2 e_2^2 = p_2$.

Esempio Si consideri il mercato del bene 1: supponendo che esista una soluzione interiore, si deve trovare un vettore di prezzi $\mathbf{p}^*$ tale che la domanda aggregata del bene 1 eguagli l'offerta aggregata del bene 1 ovvero

$$x_1^1\left(p_1, p_2, p \cdot e^1\right) + x_1^2\left(p_1, p_2, p \cdot e^2\right) = e_1^1 + e_1^2$$

da cui

$$p_1^{\frac{1}{\rho-1}}\left(p_1 + p_2\right) = p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}$$

Visto che hanno importanza soltanto i prezzi relativi, si ponga $p_2 = 1$, e quindi

$$p_1^{\frac{1}{\rho-1}}\left(p_1 + 1\right) = p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + 1$$

da cui $p_1^* = 1 = p_2^*$. Dalla Legge di Walras anche il mercato del bene 2 deve essere in equilibrio ai prezzi p^*. L'allocazione di equilibrio è $\mathbf{x}^{i*} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ per $i = 1, 2$.

Esempio-molteplicità Si considerino due consumatori con le seguenti funzioni di utilità:

$$u^1\left(\mathbf{x}^1\right) = x_1^1 - \frac{1}{8}\left(x_2^1\right)^{-8} \text{ e } u^2\left(\mathbf{x}^2\right) = -\frac{1}{8}\left(x_1^2\right)^{-8} + x_2^2$$

Le dotazioni iniziali sono $\mathbf{e}^1 = (2, r)$ e $\mathbf{e}^2 = (r, 2)$ dove $r = 2^{\frac{8}{9}} - 2^{\frac{1}{9}} = 0.771\,69$.

Le domande sono

$$\mathbf{x}^1 = \left(x_1^1, x_2^1\right) = \left(2 + r\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-1} - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-\frac{8}{9}}, \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{9}}\right)$$

$$\mathbf{x}^2 = \left(x_1^2, x_2^2\right) = \left(\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-\frac{1}{9}}, 2 + r\left(\frac{p_1}{p_2}\right) - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{8}{9}}\right)$$

dove la domanda del consumatore 1 per il bene 1 potrebbe essere crescente in p_1 (lo stesso vale simmetricamente per il consumatore 2).

Esempio Considerando il mercato del bene 2 ed eguagliando la domanda totale all'offerta totale, ovvero $x_2^1 + x_2^2 = 2 + r$ si ha

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{9}} + 2 + r\left(\frac{p_1}{p_2}\right) - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{8}{9}} = 2 + r$$

che ha tre possibili soluzioni in $(p_1/p_2)^* = \left(\frac{1}{2}, 1, 2\right)$. Quindi

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^1\left(\frac{1}{2}\right) &= (1.6916, 0.92587) \text{ e } \mathbf{x}^2\left(\frac{1}{2}\right) = (1.0801, 1.8458) \\
\mathbf{x}^1(1) &= (1.7717, 1) \text{ e } \mathbf{x}^2(1) = (1, 1.7717) \\
\mathbf{x}^1(2) &= (1.8458, 1.0801) \text{ e } \mathbf{x}^2(2) = (0.92587, 1.6916)
\end{aligned}$$

Esempio: non-esistenza Si considerino due consumatori con le seguenti funzioni di utilità

$$u^1\left(\mathbf{x}^1\right)=\left(x_1^1\right)^{\frac{1}{2}}+x_2^1 \text{ e } u^2\left(\mathbf{x}^2\right)=x_1^2$$

e con dotazione iniziale $\mathbf{e}^1=(0,1)$ e $\mathbf{e}^2=(1,0)$. Si noti che

$$SMS_{1,2}^1=\frac{1}{2\sqrt{x_1^1}}$$

e quindi in corrispondenza di $\mathbf{e}^1=(0,1)$, si ha $SMS_{1,2}^1=\infty$. Se $\frac{p_1}{p_2}>0$ il consumatore 2 vorrà sempre consumare la propria dotazione iniziale, mentre il consumatore 1 vorrà sempre cedere bene 2 in cambio di bene 1 (la domanda walrasiana di bene 1 del consumatore 1 è sempre strettamente positiva).
Se $\frac{p_1}{p_2}=\infty$, il consumatore 1 ha una domanda infinita di bene 2.

I teoremi dell'economia del benessere

- L'equilibrio walrasiano ha delle implicazioni di natura distributiva e normativa.
- Sia $\mathbf{p}^*$ un equilibrio walrasiano di un'economia con dotazione iniziale $\mathbf{e}$ e sia

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}^*) = \left(\mathbf{x}^1\left(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}^1\right), ..., \mathbf{x}^N\left(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}^N\right)\right)$$

il vettore delle domande degli N agenti. Allora $\mathbf{x}(\mathbf{p}^*)$ è detto *allocazione walrasiana di equilibrio* ed è tale che:

1. $\mathbf{x}(\mathbf{p}^*)$ è realizzabile $\mathbf{x}(\mathbf{p}^*) \in F(\mathbf{e}) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}^i(\mathbf{p}^*) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{e}^i$.
2. se $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}(\mathbf{p}^*)$, $\mathbf{y} \in F(\mathbf{e})$, ed esiste almeno un agente $i \in N$ per cui $\mathbf{y}^i \succ^i \mathbf{x}^i(\mathbf{p}^*)$, allora $\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{y}^i > \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}^i = \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}^i(\mathbf{p}^*)$.

I teoremi dell'economia del benessere

- Visto che non è detto che le allocazioni walrasiane di equilibrio siano uniche, si denoti con $W(\mathbf{e})$ l'insieme delle allocazioni di equilibrio walrasiane per un'economia con dotazione $\mathbf{e}$.

Primo Teorema dell'Economia del Benessere Sia $\mathbf{p}^*$ un equilibrio walrasiano di un'economia con dotazione iniziale $\mathbf{e}$ e sia $\mathbf{x}(\mathbf{p}^*) \in W(\mathbf{e})$. Allora $\mathbf{x}(\mathbf{p}^*)$ è Pareto-efficiente.

Dimostrazione Si consideri un'allocazione di equilibrio walrasiana ma si supponga che $\mathbf{x}(\mathbf{p}^*)$ non sia Pareto-efficiente. Allora esiste un'allocazione $\mathbf{y}$ tale che $\mathbf{y}^i \succeq \mathbf{x}^i(\mathbf{p}^*)$ per tutti gli i e $\mathbf{y}^j \succ \mathbf{x}^j(\mathbf{p}^*)$ per almeno un individuo j. Ma allora $\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{y}^i \geq \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}^i(p^*)$ per tutti gli i e $\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{y}^j > \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}^j(\mathbf{p}^*)$ per j. Sommando su tutti gli individui si ottiene

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{y}^i > \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}^i(\mathbf{p}^*) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}^i$$

ma allora $\mathbf{y}$ non è realizzabile.

I teoremi dell'economia del benessere

- L'insieme delle allocazioni di equilibrio walrasiane è contenuto nel core dell'economia ovvero $W(\mathbf{e}) \subset C(\mathbf{e})$ e ogni allocazione nel core è Pareto-efficiente.
- Il Primo Teorema dell'economia del benessere fornisce la descrizione formale della "mano invisibile" di Adam Smith:
  - un sistema economico che dipende dalle decisioni decentralizzate dei consumatori è in grado di generare l'allocazione di risorse "migliore" dal punto di vista sociale.

I teoremi dell'economia del benessere

- Un pianificatore sociale potrebbe raggiungere qualsiasi allocazione efficiente delle risorse redistribuendo appropriatamente le dotazioni iniziali (oppure con trasferimenti di ricchezza in somma fissa) e lasciando che il mercato operi autonomamente.

Secondo Teorema dell'Economia del Benessere Siano le preferenze $\succsim^i$ degli agenti razionali, continue, strettamente monotone e strettamente convesse. Si consideri un'economia con dotazione $\mathbf{e}$ dove $\sum_{i=1}^{N} \mathbf{e}^i \gg \mathbf{0}$. Si supponga che $\bar{\mathbf{x}} \gg \mathbf{0}$ sia Pareto-efficiente e che le dotazioni iniziali siano redistribuite in modo che il nuovo vettore di dotazioni sia $\bar{\mathbf{x}}$. Allora esistono dei prezzi di equilibrio walrasiano $\bar{\mathbf{p}}$ tali che $\bar{\mathbf{x}}$ è un'allocazione walrasiana di equilibrio per un'economia con dotazione $\bar{\mathbf{x}}$.

I teoremi dell'economia del benessere

- Se l'economia si trova nel nuovo punto di dotazioni iniziali $\overline{\mathbf{x}}$, l'equilibrio walrasiano non comporta nessuno scambio.
- Il secondo teorema si può estendere come segue.
- Se $\overline{\mathbf{x}} \gg \mathbf{0}$ è Pareto-efficiente, allora esiste un vettore di prezzi di equilibrio walrasiano $\overline{\mathbf{p}} \gg \mathbf{0}$ tale che $\overline{\mathbf{x}}$ è un'allocazione walrasiana di equilibrio per l'economia dopo che le dotazioni iniziali sono state redistribuite in modo che il nuovo vettore di dotazioni sia $\overline{\mathbf{e}} \in F(\mathbf{e})$ tale che $\overline{\mathbf{p}} \cdot \overline{\mathbf{e}}^i = \overline{\mathbf{p}} \cdot \overline{\mathbf{x}}^i$ per tutti gli agenti i.