Decisioni in condizioni di incertezza

Nadia Burani

Università di Bologna

A.A. 2017/18

In sintesi

- Le lotterie
  - l'ordinamento di preferenza sullo spazio delle lotterie
- La funzione di utilità attesa di von-Neumann e Morgenstern (1944).
- La funzione di utilità attesa con premi monetari
  - attitudine nei confronti del rischio

L'incertezza

- Nello studio delle decisioni di consumo abbiamo considerato come oggetto di scelta i panieri di consumo, su cui ciascun individuo ha un determinato ordinamento di preferenza
  - I panieri di consumo tra cui gli individui possono scegliere sono concepiti come "cose certe".
- Molte importanti decisioni di consumo riguardano invece scelte delle cui conseguenze gli individui non sono certi nel momento in cui la scelta viene effettuata
  - quando si acquista una macchina non si è certi della sua qualità
  - quando si sceglie un corso di laurea, non si è certi delle proprie abilità, della preparazione dei docenti...
  - quando si investe in un titolo azionario, non si è certi del suo rendimento.
- Sia nei mercati finanziari sia nei mercati reali si scambiano continuamente dei beni dal carattere rischioso o incerto.

L'incertezza

- In un contesto rischioso, le preferenze degli individui non sono più definite su alternative certe ma su *lotterie.*
- Si definisca un *esito* (o *premio*) come il risultato di qualche situazione incerta:
    - un esito può essere rappresentato da un paniere di consumo, da una quantità di denaro oppure un esito può implicare ulteriore incertezza (essere un'altra lotteria)
    - Esempio 1: ci sono due panieri di consumo composti da due soli beni, panini e lattine di Coca; con probabilità $\frac{1}{3}$ si ottiene il paniere $(3, 1)$ e con probabilità $\frac{2}{3}$ si ottiene il paniere $(2, 2)$.
    - Esempio 2: due amici, A e B, giocano a testa o croce. Se vince A, B regala ad A il suo gratta e vinci, se vince B, A dà 1 euro a B.
- Un *esito finale* non contempla nessuna incertezza ulteriore.

Le lotterie

- Ad ogni situazione rischiosa si associa l'insieme $X = \{x_1, x_2, ..., x_K\}$ di esiti finali, ovvero l'insieme di tutte le situazioni esaustive, mutumente esclusive e prive di ulteriore rischio in cui un individuo può venirsi a trovare.
- Una lotteria L definisce una prospettiva incerta tale che ad ogni esito finale x_k è associata la probabilità p_k che si verifichi l'esito finale k.
- Le *probabilità* degli esiti finali sono *oggettive* e quindi comuni e note a tutti gli individui.[1]
- Le probabilità p_k sono tali che $p_k \in [0, 1]$ per ogni k e $\sum_{k=1}^{K} p_k = 1$.
- Una lotteria L è definita come

$$L = [p_1 \circ x_1 \oplus p_2 \circ x_2 \oplus .... \oplus p_K \circ x_K]$$

[1] Quando le probabilità associate al verificarsi degli eventi futuri sono oggettive si parla di rischio, altrimenti di incertezza.

Le lotterie

Definizione Lo spazio delle lotterie $\mathcal{L}(X)$ è l'insieme di tutte le possibili lotterie che possono essere costruite a partire dall'insieme degli esiti finali X variando le probabilità p_k associate a ciascun esito x_k.

- Visto che l'esito finale x_k è una lotteria speciale in cui $p_k = 1$ e $p_l = 0$ per ogni $l \neq k$, possiamo interpretare l'insieme X come un sottoinsieme dello spazio delle lotterie $\mathcal{L}(X)$.
- Il problema della scelta in condizioni di incertezza è interpretato come il problema della scelta tra lotterie L alternative in $\mathcal{L}(X)$:
  - gli oggetti di scelta di ciascun individuo sono le diverse lotterie L in $\mathcal{L}(X)$
  - le preferenze degli individui sono definite su $\mathcal{L}(X)$ e consentono di ordinare le diverse lotterie L in $\mathcal{L}(X)$.

Le preferenze

- Una relazione binaria d'ordine $\succsim$ descrive le preferenze degli individui relativamente alle lotterie in $\mathcal{L}(X)$ se soddisfa una serie di proprietà.
- Assiomi della scelta in condizioni di incertezza.

Razionalità La relazione di preferenza debole $\succsim$ è *razionale* se soddisfa le proprietà seguenti:

(*i*) Completezza: per ogni coppia di lotterie $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(X)$, non necessariamente distinte, si ha $L_1 \succeq L_2$ o $L_2 \succeq L_1$ (o entrambi)

(*ii*) Transitività: per ogni tre lotterie $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{L}(X)$, se $L_1 \succsim L_2$ e $L_2 \succsim L_3$, allora $L_1 \succsim L_3$.

- La completezza implica la riflessività: basta prendere $L_1 = L_2$.

Le preferenze

- Visto che l'insieme degli esiti finali è finito e che l'ordinamento delle preferenze è completo, devono esistere un esito migliore e un esito peggiore:
  - l'esito migliore x_B è tale che $x_B \succsim x_k$ per ogni $x_k \in X$
  - l'esito peggiore x_W è tale che $x_k \succsim x_W$ per ogni $x_k \in X$

Continuità Per ogni lotteria $L \in \mathcal{L}(X)$ esiste una probabilità $z \in [0, 1]$ tale che

$$L \sim [z \circ x_B \oplus (1 - z) \circ x_W]$$

- E' possibile associare ad ogni lotteria L un'altra lotteria che coinvolge solo l'esito migliore e l'esito peggiore e che è indifferente a L.
- La continuità vale anche nel caso particolare di $L = x_k$.

Le preferenze

Monotonicità Per ogni coppia di lotterie che coinvolgono solo l'esito migliore e l'esito peggiore,

$$\begin{aligned} L_1 &= [p \circ x_B \oplus (1-p) \circ x_W] \\ L_2 &= [q \circ x_B \oplus (1-q) \circ x_W] \end{aligned}$$

si ha $L_1 \succsim L_2$ se e solo se $p \geq q$.

- Date due lotterie con gli stessi esiti finali (migliore e peggiore), un individuo preferisce quella che associa la probabilità più alta all'esito migliore.

Esempio Sia $X = \{\text{morte}, 10€, 1000€\}$. E' ragionevole immaginare che

$$x_B = 1000€ \succ 10€ \succ \text{morte} = x_W$$

Per la continuità ci dovrebbe essere una lotteria che offre $x_B = 1000€$ con probabilità z e x_W =morte con probabilità $(1-z)$ e che è indifferente ad ottenere 10€ con certezza. Per la monotonicità $z < 1$, ovvero $(1-z) > 0$.

Le preferenze

Sostituibilità Per ogni esito finale $x_k \in X$ e ogni lotteria $L \in \mathcal{L}(X)$ tali che $x_k \sim L$, vale

$$\left[p_1 \circ x_1 \oplus \ldots \oplus p_k \circ x_k \oplus \ldots \oplus p_K \circ x_K\right] \sim \left[p_1 \circ x_1 \oplus \ldots \oplus p_k \circ L \oplus \ldots \oplus p_K \circ x_K\right]$$

- L'assioma della sostituibilità stabilisce che un esito certo x_k e una lotteria L ad esso indifferente posso essere scambiati uno per l'altro in una terza lotteria senza alterare l'ordinamento di preferenza sulla terza lotteria.

Le preferenze

Probabilità netta Sia $L_k = [p_1 \circ x_1 \oplus \ldots \oplus p_k \circ L \oplus \ldots \oplus p_K \circ x_K]$ dove

$$L = [q_1 \circ x_1 \oplus \ldots \oplus q_k \circ x_k \oplus \ldots \oplus q_K \circ x_K] .$$

Allora $L_k \sim$

$$[(p_1 + p_k q_1) \circ x_1 \oplus \ldots \oplus p_k q_k \circ x_k \oplus \ldots \oplus (p_K + p_k q_K) \circ x_K]$$

- La regola della probabilità netta stabilisce che, quando si ordinano le lotterie, importano soltanto le probabilità degli esiti finali in X
  - non importa quante sono le lotterie che si devono affrontare per arrivare ad un esito finale
  - gli individui non traggono piacere dal gioco

La funzione di utilità attesa

- Come nella teoria del consumatore, il problema è: esiste una funzione continua a valori reali che rappresenta le preferenze degli agenti?
- La risposta affermativa la diedero von-Neumann e Morgenstern nel 1944.
- Sia L una lotteria qualsiasi in $\mathcal{L}(X)$. Una funzione di utilità $U : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ che rappresenta le preferenze $\succsim$ deve assegnare un numero maggiore a qualsiasi lotteria preferita ad L e lo stesso numero a qualsiasi lotteria indifferente ad L.
- Ma non solo...

La funzione di utilità attesa

Definizione Una funzione di utilità $U : \mathcal{L}(X) \to \mathbb{R}$ possiede la *proprietà dell'utilità attesa* se i numeri che U associa alle lotterie in $\mathcal{L}(X)$ sono tali che

$$U(L) = \sum_{k=1}^{K} p_k U(x_k)$$

- Una funzione di utilità U possiede la proprietà dell'utilità attesa se e solo se associa a ciascuna lotteria L un numero che può essere espresso come la media dei numeri (rappresentativi dell'utilità) associati agli esiti finali della lotteria.
- Le funzioni U che possiedono la proprietà dell'utilità attesa si chiamano *funzioni di utilità di von-Neumann e Morgenstern* (VNM).

La funzione di utilità attesa

Rappresentabilità Sia $\succsim$ una relazione di preferenza definita su $\mathcal{L}(X)$ che soddisfa tutti gli assiomi visti. Allora esiste una funzione $U : \mathcal{L}(X) \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(X)$

$$L_1 \succsim L_2 \Longleftrightarrow U(L_1) \geq U(L_2)$$

e tale che, per ogni $L \in \mathcal{L}(X)$ con

$$L = [p_1 \circ x_1 \oplus \ldots \oplus p_k \circ x_k \oplus \ldots \oplus p_K \circ x_K],$$

si ha

$$U(L) = \sum_{k=1}^{K} p_k U(x_k)$$

La funzione di utilità attesa

- La funzione di utilità attesa assegna un numero a ciascuna lotteria in due tappe distinte:
  - prima vengono assegnati dei numeri rappresentativi dell'utilità a tutte le lotterie che offrono un esito con certezza (ovvero a tutti gli esiti finali)
  - poi vengono assegnati dei numeri rappresentativi dell'utilità a tutte le lotterie in $\mathcal{L}(X)$
  - la U in $U(L)$ è la stessa U in $U(x_k)$.
- La differenza tra l'utilità associata a due esiti finali può influenzare l'ordinamento tra lotterie che contengono gli stessi esiti finali.
- La funzione di utilità attesa è unica a meno di trasformazioni affini

$$V(L) = aU(L) + b \text{ con } a > 0.$$

La funzione di utilità attesa con premi monetari

- Si può stabilire una relazione tra la funzione di utilità attesa e l'attitudine degli individui nei confronti del rischio.
- Si considerino soltanto lotterie i cui esiti finali consistono in differenti ammontari di ricchezza.
- Sia l'insieme dei possibili esiti finali

$$X = \{m_1, m_2, ..., m_K\}.$$

- Il *valore atteso* di una lotteria L che offre ogni m_k con probabilità p_k è dato da

$$E(L) = \sum_{k=1}^{K} p_k m_k$$

La funzione di utilità attesa con premi monetari

- Si supponga di dover scegliere tra:
  - accettare la lotteria L
  - ricevere con certezza il valore atteso della lotteria $E(L)$
- Se U è la funzione di utilità attesa, possiamo calcolare l'utilità attesa delle due alternative

$$\begin{aligned} U(L) &= \sum_{k=1}^{K} p_k U(m_k) \\ U(E(L)) &= U\left(\sum_{k=1}^{K} p_k m_k\right) \end{aligned}$$

- Si sceglierà l'alternativa con l'utilità attesa più alta.

La funzione di utilità attesa con premi monetari

Definizione Si dice che, di fronte alla lotteria L, un individuo è (localmente):

(a) avverso al rischio quando $U(E(L)) > U(L)$
(b) neutrale al rischio quando $U(E(L)) = U(L)$
(c) propenso al (amante del) rischio quando $U(E(L)) < U(L)$

- Se le relazioni precedenti valgono in corrispondenza di qualsiasi lotteria $L \in \mathcal{L}(X)$ allora la definizione vale globalmente.

La funzione di utilità attesa con premi monetari

- Le definizioni riguardanti l'attitudine al rischio sono equivalenti a particolari proprietà dell'utilità attesa:
  - (*a*) un agente è avverso al rischio quando la sua funzione di utilità attesa è strettamente concava nella ricchezza m
  - (*b*) un agente è neutrale al rischio quando la sua funzione di utilità attesa è lineare in m
  - (*c*) un agente è propenso al (amante del) rischio quando la sua funzione di utilità attesa è strettamente convessa in m

La funzione di utilità attesa con premi monetari

Equivalente certo L'equivalente certo di una lotteria L è un ammontare di denaro EC tale che

$$U(L) = U(EC).$$

- EC è un ammontare di denaro che rende un individuo indifferente tra accettare la lotteria oppure accettare quell'ammontare certo di denaro.
- Se un individuo è avverso al rischio, l'equivalente certo è minore del valore atteso della lotteria $E(L)$, ovvero $EC < E(L)$
- Se un individuo è avverso al rischio, sarà disposto a pagare un ammontare positivo di denaro per evitare il rischio rappresentato dalla lotteria

La funzione di utilità attesa con premi monetari

Premio per il rischio Il premio per il rischio è un ammontare di denaro P tale che

$$U(L) = U(E(L) - P)$$

quindi, visto che $U(L) = U(EC)$

$$P = E(L) - EC$$

Esempio Sia $U(m) = \log m$ con $m > 1$. La funzione di utilità è concava in m, quindi rappresenta le preferenze di un individuo avverso al rischio. Sia m la ricchezza iniziale dell'individuo e sia L una lotteria che fa vincere o perdere un ammontare H con la stessa probabilità, ovvero

$$L = \left[\frac{1}{2} \circ (m - H) \oplus \frac{1}{2} \circ (m + H)\right].$$

Il valore atteso della lotteria è $E(L) = m$.

Esempio L'equivalente certo deve soddisfare

$$U(EC) = U(L)$$

$$U(EC) = \frac{1}{2}U(m-H) + \frac{1}{2}U(m+H) \equiv U(L)$$

$$\log(EC) = \frac{1}{2}\log(m-H) + \frac{1}{2}\log(m+H)$$

$$\log(EC) = \frac{1}{2}\log((m-H)(m+H))$$

ovvero

$$EC = ((m-H)(m+H))^{\frac{1}{2}}$$

dove $EC = \left(\left(m^2 - H^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} < m = E(L)$. Il premio per il rischio è

$$P = E(L) - EC = m - \left(\left(m^2 - H^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} > 0$$

Esempio (domanda di assicurazione) Un individuo avverso al rischio con ricchezza iniziale m deve decidere se e per quanto assicurare la propria auto. Con probabilità $p \in (0,1)$ ha un incidente e incorre nel danno D. Può acquistare un'assicurazione, che gli garantisca x euro in caso di incidente, pagando l'importo ρx: $\rho < 1$ indica il premio per euro di copertura. Qual è la scelta ottimale di x?

L'individuo massimizza la propria utilità attesa

$$\max_{x} pU(m - D + x - \rho x) + (1 - p)\, U(m - \rho x)$$

Le c.p.o. sono

$$pU'(m - D + x - \rho x)(1 - \rho) - (1 - p)\, U'(m - \rho x)\, \rho = 0$$

ovvero

$$\frac{U'(m - D + x - \rho x)}{U'(m - \rho x)} = \frac{(1 - p)}{p} \frac{\rho}{(1 - \rho)} \qquad (1)$$

La funzione di utilità attesa con premi monetari

Esempio La compagnia di assicurazione, invece, è neutrale nei confronti del rischio e ha un profitto atteso pari a

$$E(\pi) = p(\rho x - x) + (1-p)\rho x$$

Assumendo che il mercato assicurativo sia in concorrenza perfetta e che i profitti attesi siano nulli, $E(\pi) = 0$, si ha

$$-p(1-\rho)x + (1-p)\rho x = 0 \Leftrightarrow \rho = p$$

ovvero l'assicurazione fissa un premio giusto da un punto di vista attuariale (tale che il costo della polizza è uguale al suo valore atteso). Sostituendo questa condizione in (1) si trova

$$U'(m - D + x - \rho x) = U'(m - \rho x)$$

ovvero

$$m - D + x - \rho x = m - \rho x \Leftrightarrow x^* = D$$

Indipendentemente dall'incidente, la ricchezza dell'individuo è costante e pari a $m - pD$.

La funzione di utilità attesa con premi monetari

- Spesso ci interessa non soltanto sapere se un individuo è avverso al rischio, ma quanto è avverso.
- Ci interessa una misura di attitudine al rischio che consenta di:
  1. confrontare il grado di avversione al rischio tra diversi individui
  2. indicare come cambia il grado di avversione al rischio di un singolo individuo al variare della sua ricchezza monetaria
- Si tratta di un indice basato sulla derivata seconda della funzione di utilità attesa che misura la curvatura di U

Definizione La misura dell'avversione assoluta al rischio di Arrow-Pratt è data da

$$R(m) = -\frac{U''(m)}{U'(m)}$$

- Il segno di $R(m)$ è positivo, zero o negativo a seconda che l'individuo sia avverso, neutrale o propenso al rischio.
- Ogni trasformazione affine positiva di U lascia la misura $R(m)$ inalterata.

La funzione di utilità attesa con premi monetari

- La misura $R(m)$ consente di confrontare l'attitudine al rischio di due diversi individui.
- Sia $R_1(m)$ la misura di avversione assoluta al rischio del primo individuo e sia $R_2(m)$ la stessa misura relativa al secondo individuo.
- Il primo individuo è almeno altrettanto avverso al rischio del secondo quando $R_1(m) \geq R_2(m)$ per un intervallo di m.
- Il primo individuo è almeno altrettanto avverso al rischio del secondo quando, per ogni lotteria L ed esito certo x tali che il primo individuo preferisce debolmente L a x, anche il secondo individuo preferisce L a x.

La funzione di utilità attesa con premi monetari

- La misura $R(m)$ è una misura locale di avversione al rischio perché non è necessariamente la stessa per ogni possibile livello di ricchezza.
- Classificazione delle funzioni di utilità attesa a seconda di come $R(m)$ varia al variare della ricchezza (Arrow):

  (a) una funzione di utilità VNM mostra avversione al rischio assoluta crescente (IARA) su un qualche intervallo di m se $R(m)$ è crescente in m, ovvero $\partial R(m)/\partial m > 0$.

  (b) una funzione di utilità VNM mostra avversione al rischio assoluta costante (CARA) se $R(m)$ è costante rispetto a m, ovvero $\partial R(m)/\partial m = 0$.

  (c) una funzione di utilità VNM mostra avversione al rischio assoluta decrescente (DARA) se $R(m)$ è decrescente in m, ovvero $\partial R(m)/\partial m < 0$.

La funzione di utilità attesa con premi monetari

- Una restrizione plausibile è che la funzione di utilità VNM sia DARA, ovvero mostri avversione al rischio assoluta decrescente
- Un individuo è meno avverso ad assumere piccoli rischi quando ha un livello di ricchezza più elevato.

Esempio (scelte di portafoglio) Si consideri un investitore che deve decidere quanta della sua ricchezza iniziale m investire in un'attività rischiosa. Quest'ultima può avere un qualsiasi rendimento (positivo o negativo) r_i con probabilità p_i dove $i = 1, 2, ...n$. Sia β l'ammontare di ricchezza investito nell'attività rischiosa: se si verifica l'esito i allora la ricchezza finale sarà $m + \beta r_i$. Il problema dell'investitore è scegliere β per massimizzare l'utilità attesa

$$\max_{\beta} \sum_{i=1}^{n} p_i U\left(m + \beta r_i\right) \text{ con } 0 \leq \beta \leq m \tag{2}$$

La funzione di utilità attesa con premi monetari

Esempio Sotto quali condizioni un investitore avverso al rischio decide non investire nell'attività rischiosa, ovvero quando si raggiunge un massimo di (2) in corrispondenza di $\beta^* = 0$? La derivata di (2) rispetto a β deve essere non positiva in $\beta^* = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i U' \left(m + \beta^* r_i\right) r_i \leq 0$$

ovvero

$$\sum_{i=1}^{n} p_i r_i U' \left(m\right) = U' \left(m\right) \sum_{i=1}^{n} p_i r_i \leq 0.$$

Ma visto che $U' \left(m\right) > 0$, deve valere che $\sum_{i=1}^{n} p_i r_i \leq 0$.

Dunque il rendimento atteso dell'attività rischiosa deve essere non positivo. In altre parole, l'investitore investirà parte della propria ricchezza in un'attività rischiosa solo se il valore atteso del suo rendimento è strettamente positivo.

La funzione di utilità attesa con premi monetari

Esempio Si assuma quindi che l'attività rischiosa abbia un rendimento atteso strettamente positivo. Si supponga inoltre che $0 < \beta^* < m$ e si determinino le condizioni per un massimo interiore: la c.p.o è

$$\sum_{i=1}^{n} p_i U' \left(m + \beta^* r_i \right) r_i = 0 \tag{3}$$

e la c.s.o. è

$$\sum_{i=1}^{n} p_i r_i^2 U'' \left(m + \beta^* r_i \right) < 0. \tag{4}$$

Cosa accade alla quantità di ricchezza investita β quando la ricchezza aumenta? Dovrebbe aumentare, perché l'attività rischiosa dovrebbe essere un bene normale e $\frac{d\beta^*}{dm} > 0$.

La funzione di utilità attesa con premi monetari

Esempio Calcolando il differenziale totale della (3) rispetto a β^* e rispetto a m si ottiene

$$\frac{d\beta^*}{dm} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i U''(m + \beta^* r_i) r_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i r_i^2 U''(m + \beta^* r_i)}. \tag{5}$$

Il denominatore è negativo per la c.s.o. quindi l'attività rischiosa è un bene normale e $\frac{d\beta^*}{dm} > 0$ quando il numeratore è positivo. Si può dimostrare che ciò accade quando U è DARA. La misura di avversione assoluta al rischio in corrispondenza di $(m + \beta^* r_i)$ è

$$R(m + \beta^* r_i) = -\frac{U''(m + \beta^* r_i)}{U'(m + \beta^* r_i)}$$

La funzione di utilità attesa con premi monetari

Esempio Risolvendo per $U''(m + \beta^* r_i)$ si ottiene

$$-U''(m + \beta^* r_i) = R(m + \beta^* r_i) U'(m + \beta^* r_i)$$

da cui

$$-U''(m + \beta^* r_i) r_i = R(m + \beta^* r_i) U'(m + \beta^* r_i) r_i \text{ per } i = 1..n \quad (6)$$

Sotto DARA si ha $R(m) > R(m + \beta^* r_i)$ se $r_i > 0$ e $R(m) < R(m + \beta^* r_i)$ se $r_i < 0$. In entrambi i casi

$$R(m) r_i > R(m + \beta^* r_i) r_i \text{ per } i = 1, ..n.$$

Sostituendo $R(m)$ al posto di $R(m + \beta^* r_i)$ nella (6) si ha

$$-U''(m + \beta^* r_i) r_i < R(m) U'(m + \beta^* r_i) r_i.$$

Esempio Prendendo il valore atteso si ottiene

$$-\sum_{i=1}^{n} p_i U''\left(m+\beta^* r_i\right) r_i < R\left(m\right) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i U'\left(m+\beta^* r_i\right) r_i}_{\text{cpo}} = 0.$$

Quindi $-\sum_{i=1}^{n} p_i U''\left(m+\beta^* r_i\right) r_i < 0$ ovvero il numeratore della (5) è positivo.

La funzione di utilità attesa con premi monetari

- Nei problemi economici, i possibili esiti di un lotteria sono spesso espressi in forma moltiplicativa anzichè in forma additiva rispetto alla ricchezza iniziale m.
- Esempio: con probabilità p si riceve l'x percento della ricchezza iniziale (ammontare dell'investimento) e con probabilità $(1-p)$ si riceve l'y percento. La lotteria corrispondente è

$$L = [p \circ xm \oplus (1-p) \circ ym]$$

Definizione La misura dell'avversione relativa al rischio di Arrow-Pratt è data da

$$\rho(m) = -\frac{U''(m)\,m}{U'(m)}$$

- Si può ragionevolmente assumere che l'avversione relativa al rischio sia costante, almeno per piccole variazioni di m.

Critiche alla funzione di utilità attesa (con premi monetari)

- La teoria dell'utilità attesa si fonda sul presupposto che il consumatore adotti scelte razionali.
- Gli assiomi su cui si fonda la teoria dell'utilità attesa sembrano plausibili.
- Tuttavia il comportamento reale degli individui sembra violare sistematicamente questi assiomi. .
- *Il Paradosso di Allais:* in un esperimento, i soggetti devono scegliere tra queste due lotterie

$$L_A = [1 \circ 1 \text{ mln}] \text{ e } L_B = [0,1 \circ 5 \text{ mln} \oplus 0,89 \circ 1 \text{ mln} \oplus 0,01 \circ 0]$$

Poi i soggetti devono scegliere tra le seguenti lotterie

$$L_C = [0,11 \circ 1 \text{ mln} \oplus 0,89 \circ 0] \text{ e } L_D = [0,1 \circ 5 \text{ mln} \oplus 0,90 \circ 0].$$

Il paradosso di Allais

- Nell'esperimento precedente, molti soggetti dichiarano che $L_A \succeq L_B$ e anche $L_D \succeq L_C$.
- Ma queste scelte non sono coerenti con la teoria di VNM.
- Calcoliamo l'utilità attesa associata alle ultime due lotterie

$$U(L_D) = 0,1u(5) + 0,9u(0) \geq 0,11u(1) + 0,89u(0) = U(L_C)$$

e se aggiungiamo $0,89u(1)$ ad entrambi i lati della disuguaglianza si ottiene

$$0,1u(5) + 0,9u(0) + 0,89u(1) \geq 0,11u(1) + 0,89u(1) + 0,89u(0)$$

ovvero

$$0,1u(5) + 0,01u(0) + 0,89u(1) \geq u(1)$$

Ciò implica che

$$U(L_B) \geq U(L_A) \Longleftrightarrow L_B \succeq L_A.$$

Il paradosso di Allais

- $L_D \succeq L_C$ deriva dal fatto che probabilità molto simili (10% e 11% rispettivamente) sono associate a due premi monetari molto diversi (5mln e 1mln rispettivamente)
- L'ordinamento tra queste due lotterie non dovrebbe essere alterato dal fatto che ad entrambe si aggiunge lo stesso evento con la stessa probabilità (89% di vincere 1mln)
- Tuttavia, in un caso questo comporta una vincita certa di 1 milione e nell'altro una piccola probabilità di non vincere nulla
- I soggetti vogliono evitare quest'ultimo caso per non incorrere in un'amara delusione e preferiscono la vincita certa, quindi $L_A \succeq L_B$.
- Aggiungere $0,89u\,(1)$ a due lotterie non è irrilevante per l'ordinamento delle due lotterie perché si genera una complementarietà tra gli esiti.