Decisioni di produzione I

Tecnologia

Nadia Burani

Università di Bologna

A.A. 2017/18

In sintesi

- La teoria della produzione
- La tecnologia:
    - l'insieme delle possibilità di produzione
- La tecnologia con un solo output:
    - l'insieme del fabbisogno degli inputs
    - la funzione di produzione e gli isoquanti
    - il saggio marginale di sostituzione tecnica
    - i rendimenti di scala

L'impresa

- Dopo il consumatore, l'impresa è la più importante unità decisionale in microeconomia
- La teoria dell'impresa permette di studiare il "lato offerta" ovvero il processo attraverso cui i beni e i servizi consumati dagli individui vengono prodotti
- L'impresa è interpretata come una "black box" in grado di trasformare inputs in outputs
  - L'impresa acquista i fattori di produzione nel mercato degli inputs a prezzi esogeni e queste spese rappresentano i costi dell'impresa
  - L'impresa vende i propri prodotti nel mercato dei beni finali (a prezzi esogeni se opera in regime di concorrenza perfetta) e ottiene un guadagno dalla vendita
  - I profitti dell'impresa sono la differenza tra i ricavi delle vendite e le spese per l'acquisto dei fattori

L'impresa

- Il modo in cui gli inputs vengono combinati per produrre gli outputs dipende:
  1. da ciò che è tecnologicamente fattibile
  2. dalle decisioni dell'impresa
- La tecnologia descrive ciò che è tecnicamente fattibile per un'impresa e quindi i vincoli dell'impresa
- Le decisioni dell'impresa dipendono dal suo obiettivo:
  - la massimizzazione del profitto
  - la minimizzazione dei costi
- I due problemi decisionali dell'impresa sono duali

La tecnologia

- La tecnologia descrive i vincoli che un'impresa fronteggia nel trasformare inputs in outputs
- Si considera un'economia con K beni che un'impresa può utilizzare come inputs o come outputs
- Un vettore di produzione o un *piano di produzione* è un vettore

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_K \end{bmatrix}$$

  in $\mathbb{R}^K$ che descive gli outputs netti dei K beni derivanti da un processo produttivo.
  - uno stesso bene k può essere utilizzato sia come input sia come output
  - per convezione, le componenti negative di $\mathbf{y}$ denotano gli inputs netti mentre le componenti positive denotano gli outputs netti (qualche componente può essere nulla)

La tecnologia

Insieme di produzione Sottoinsieme dello spazio dei piani di produzione, che si denota con $Y \subset \mathbb{R}^K$, e che descrive tutti i piani di produzione che sono tecnologicamente fattibili per un'impresa, dati i vincoli imposti dall'ambiente

- L'insieme di produzione fornisce una descrizione completa della tecnologia a disposizione di un'impresa.

Funzione di trasformazione La funzione di trasformazione $F(\mathbf{y})$ permette di rappresentare l'insieme dei piani di produzione tecnicamente possibili ed è tale che

$$Y = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^K \mid F(\mathbf{y}) \leq 0 \right\} \text{ e } F(\mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{y} \in fr(Y)$$

- L'insieme dei punti di frontiera di Y, ovvero $\left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^K \mid F(\mathbf{y}) = 0 \right\}$ si chiama *frontiera di trasformazione*

La tecnologia

- La frontiera di trasformazione rappresenta l'insieme dei piani di produzione tecnicamente efficienti e quindi, se $\mathbf{y}$ soddisfa $F(\mathbf{y}) = 0$, allora non è possibile produrre maggiori quantità di outputs netti utilizzando gli stessi inputs oppure non è possibile produrre gli stessi outputs netti utilizzando minori quantità di inputs.
- Se si assume che $F(\cdot)$ sia differenziabile e se il vettore $\mathbf{y}$ è tale che $F(\mathbf{y}) = 0$, allora

$$SMT_{k,l} \equiv \frac{dy_l}{dy_k} = -\frac{\partial F(\mathbf{y}) / \partial y_k}{\partial F(\mathbf{y}) / \partial y_l}$$

  rappresenta il *saggio marginale di trasformazione* del bene k per il bene l in corrispondenza di $\mathbf{y}$ e misura quanto può aumentare l'output netto del bene l a fronte di una diminuzione di un'unità addizionale dell'output netto del bene k.

La tecnologia: proprietà degli insiemi di produzione

- Proprietà degli insiemi di produzione Y:
  1. Y è non-vuoto. L'impresa ha qualcosa da fare
  2. Y è chiuso e limitato (contiene la sua frontiera). Il limite di una sequenza di piani di produzione fattibili è anch'esso fattibile: se $\mathbf{y}_n \rightarrow \mathbf{y}$ e se $\mathbf{y}_n \in Y$ per ogni n allora $\mathbf{y} \in Y$. Assioma tecnico, assicura l'esistenza di una soluzione al problema decisionale dell'impresa
  3. *No free meal*: non è possibile produrre qualcosa dal nulla. Se $\mathbf{y} \in Y$ e $y_k \geq 0$ per ogni $k = 1, .., K$ (se non ci sono inputs netti), allora $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ (non ci sono nemmeno outputs netti), ovvero $Y \cap \mathbb{R}^K_+ = \{\mathbf{0}\}$.

- Proprietà degli insiemi di produzione Y:
  4. Possibilità di inazione: $\mathbf{0} \in Y$. Deve essere possibile per l'impresa chiudere, acquistando zero inputs e producendo zero outputs. Non vale nel breve periodo, in cui il livello di un input potrebbe essere fisso a $\bar{y}_k < 0$, o se ci sono costi sunk (l'impresa si impegna ad utilizzare almeno $y_k < 0$ unità di input k). Si devono considerare insiemi di produzione ristretti
  5. *Free disposal*. L'impresa può sempre utilizzare maggiori quantità di inputs senza ridurre gli outputs. Se $\mathbf{y} \in Y$ e $\mathbf{y}' \leq \mathbf{y}$, allora $\mathbf{y}' \in Y$, ovvero $Y - \mathbb{R}^K_+ \subset Y$ (l'impresa produce al massimo lo stesso ammontare di outputs utilizzando almeno la stessa quantità di inputs). Non ci sono costi se si sprecano inputs o outputs.

- Proprietà degli insiemi di produzione Y:

  6. Convessità di Y. Se $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in Y$ allora $[\alpha \mathbf{y} + (1-\alpha)\,\mathbf{y}'] \in Y$ per tutti gli $\alpha \in [0,1]$. Implicazioni:
     (i) Visto che $\mathbf{0} \in Y$ per la possibilità di inazione, sia $\mathbf{y}' = \mathbf{0}$ da cui $[\alpha \mathbf{y} + (1-\alpha)\,\mathbf{0}] = \alpha \mathbf{y} \in Y$. Ogni vettore $\mathbf{y}$ fattibile può essere riscalato verso il basso ed essere ancora fattibile. Quindi la convessità di Y è associata a rendimenti di scala non crescenti di Y.
     (ii) Se due piani di produzione $\mathbf{y}$ e $\mathbf{y}'$ producono entrambi lo stesso ammontare di output ma utilizzano diverse combinazioni di inputs, allora un piano di produzione che usa una media degli inputs di $\mathbf{y}$ e $\mathbf{y}'$ permette di ottenere almeno altrettanto output rispetto a $\mathbf{y}$ e $\mathbf{y}'$. Combinazioni sbilanciate di inputs non sono più produttive di combinazioni bilanciate (oppure, combinazioni sbilanciate di outputs non sono meno costose da produrre, in termini di utilizzo di inputs, rispetto a combinazioni bilanciate).
     Non vale se ci sono costi di setup.

La tecnologia: un solo output

- Si consideri il caso particolare di un solo output (il bene K) generato dalla combinazione di $K-1$ inputs
- E' conveniente descrivere la tecnologia in termini di inputs necessari a produrre diverse quantità di output

Insieme di fabbisogno degli inputs insieme di tutte le combinazioni di inputs che consentono di produrre un volume di output pari almeno a y ovvero

$$V(y) = \left\{ \begin{array}{c} (x_1.,.,x_{K-1}) \mid y > 0, (x_1.,.,x_{K-1}) \geq 0 \\ \text{e} \ \ (-x_1 ... - x_{K-1}, y) \in Y \end{array} \right\}$$

La tecnologia: un solo output

- Proprietà degli insiemi di fabbisogno degli inputs $V(y)$:
  1. Regolarità negli inputs. $V(y)$ è non-vuoto e chiuso. Se $y > 0$ allora $\mathbf{0} \notin V(y)$. Discende dalla proprietà di *no free meal*: non si può produrre qualcosa dal nulla.
  2. Monotonicità. Se $\mathbf{x} \in V(y)$ e $\mathbf{x}' \geq \mathbf{x}$ allora $\mathbf{x}' \in V(y)$. Discende dalla proprietà di *free disposal*: aumentando la quantità di almeno un input non si può ridurre l'output.
  3. Convessità. Se $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in V(y)$ allora $[\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{x}'] \in V(y)$ per tutti gli $\alpha \in [0,1]$.

La tecnologia: un solo output

Isoquanto L'insieme di combinazioni di inputs che producono esattamente y unità di output è

$$Q(y) = \left\{ \begin{array}{l} (x_1, .., x_{K-1}) \mid \mathbf{x} \in V(y) \text{ e} \\ \lambda \mathbf{x} \notin V(y) \text{ per } 0 \leq \lambda < 1 \end{array} \right\}$$

- L'isoquanto è la frontiera efficiente dell'insieme $V(y)$ ed è il luogo dove ci si aspetta che un'impresa che desidera produrre y unità di output scelga di operare se gli inputs sono costosi.
- La regolarità di $V(y)$ implica che l'isoquanto sia continuo e contenuto in $V(y)$: $Q(y)$ è la frontiera di $V(y)$
- La monotonicità di $V(y)$ implica che l'isoquanto sia non positivamente inclinato
- La monotonicità e la convessità di $V(y)$ implicano che l'isoquanto sia convesso

La funzione di produzione

Funzione di produzione indica l'ammontare massimo di output che si può ottenere per ogni possibile combinazione di inputs

$$f(\mathbf{x}) = \max\{y > 0 \mid \mathbf{x} \in V(y)\}$$

- L'insieme di livello superiore della funzione di produzione corrisponde all'insieme di fabbisogno degli inputs

$$V(y) = \{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \geq y\}$$

- Le curve di livello associate alla funzione di produzione corrispondono agli isoquanti

$$Q(y) = \{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) = y\}$$

La funzione di produzione

- Dalle proprietà di $V(y)$ discendono le proprietà della funzione di produzione:
    1. La regolarità di $V(y)$ implica che $f(\mathbf{x})$ è continua e che $f(\mathbf{0}) = 0$. Se $f(\mathbf{x}) = y$ e $y > 0$ allora $x_k > 0$ per almeno un input k
    2. La monotonicità di $V(y)$ implica che $f(\mathbf{x})$ sia non-decrescente in x_k per ogni k, ovvero, se $f(\mathbf{x})$ è derivabile, $\partial f(\mathbf{x}) / \partial x_k \geq 0$. Il *prodotto marginale* del fattore k indica di quanto varia l'output a fronte di un aumento nell'impiego del fattore k.
    3. La convessità di $V(y)$ implica la quasiconcavità della funzione di produzione.

Il saggio marginale di sostituzione tecnica

- Il *saggio marginale di sostituzione tecnica* in corrispondenza di un vettore di inputs $\mathbf{x}$ è dato da

$$SMST_{k,l} \equiv \frac{dx_l}{dx_k} = -\frac{\partial f\left(\mathbf{x}\right)/\partial x_k}{\partial f\left(\mathbf{x}\right)/\partial x_l}$$

  e rappresenta l'ammontare addizionale di input x_l cui l'impresa deve ricorrere per compensare la riduzione di una unità di input x_k e mantenere la produzione costante a $y = f\left(\mathbf{x}\right)$.
- Dalla monotonicità discende che il $SMST$ è non positivo e dalla convessità dicende che il $SMST$ è non crescente in valore assoluto
- Nel caso di due soli fattori il $SMST_{1,2}$ misura la pendenza dell'isoquanto.

L'elasticità di sostituzione

- L'*elasticità di sostituzione* tra l'input k e l'input l in corrispondenza di una combinazione di inputs $\mathbf{x}$ è data da

$$\sigma_{k,l} = \left(\frac{\partial \left| SMST_{k,l} \right|}{\partial \left(x_l / x_k \right)} \frac{x_l / x_k}{\left| SMST_{k,l} \right|} \right)^{-1} = \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}) / \partial x_k}{\partial f(\mathbf{x}) / \partial x_l} \right)}{\partial \left(x_l / x_k \right)} \frac{x_l / x_k}{\frac{\partial f(\mathbf{x}) / \partial x_k}{\partial f(\mathbf{x}) / \partial x_l}} \right)^{-1}$$

  e misura (il reciproco del) la variazione percentuale del $SMST$ in relazione alla variazione percentuale del rapporto tra fattori, in valore assoluto, mantenendo costante la produzione a $y = f(\mathbf{x})$.
- Nel caso di due soli fattori $\sigma_{1,2}$ misura la curvatura dell'isoquanto: come varia la pendenza dell'isoquanto in termini percentuali man mano che ci si sposta su diversi raggi uscenti dall'origine.
- Per $\sigma_{1,2}$ tendente a zero, l'isoquanto è molto incurvato (convesso) e la sostituzione tra i fattori è difficile.
- Per $\sigma_{1,2}$ tendente a infinito, l'isoquanto è molto piatto e la sostituzione tra i fattori è facile.

Esempio Funzione di produzione CES $f(x_1, x_2) = \left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}$ con $0 \neq \rho < 1$. Il prodotto marginale del fattore 1 è dato da

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} = \frac{1}{\rho}\left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-1} \rho x_1^{\rho-1}$$

e il prodotto marginale del fattore 2 è dato da

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} = \frac{1}{\rho}\left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-1} \rho x_2^{\rho-1}.$$

Prendendo il rapporto si ottiene il saggio marginale di sostituzione, che in valore assoluto è pari a

$$SMST_{1,2} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\rho}$$

L'elasticità di sostituzione

Esempio Funzione di produzione CES $f(x_1, x_2) = \left(x_1^{\rho} + x_2^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$ con $0 \neq \rho < 1$. Derivando il $SMST_{1,2}$ rispetto a x_2/x_1 si ottiene

$$\frac{\partial SMST_{1,2}}{\partial x_2/x_1} = (1-\rho)\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{-\rho}$$

da cui

$$\sigma_{1,2} = \left((1-\rho)\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{-\rho}\frac{x_2/x_1}{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\rho}}\right)^{-1} = \frac{1}{1-\rho}$$

I rendimenti di scala

- Come varia l'output prodotto da un'impresa quando tutti i fattori variano nella stessa proporzione?
- Nel caso di due soli inputs, si analizza come varia l'output quando ci si muove attraverso la mappa degli isoquanti mantenendosi su un raggio di equazione $x_2 = \alpha x_1$ lungo il quale i due fattori aumentano entrambi rimanendo sempre nella stessa proporzione α.
- Una funzione di produzione $f(\mathbf{x})$ ha rendimenti di scala:

  (i) costanti $\iff f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$ per ogni $\lambda > 0$ e ogni $\mathbf{x}$

  (ii) crescenti $\iff f(\lambda \mathbf{x}) > \lambda f(\mathbf{x})$ per ogni $\lambda > 1$ e ogni $\mathbf{x}$

  (iii) decrescenti $\iff f(\lambda \mathbf{x}) < \lambda f(\mathbf{x})$ per ogni $\lambda > 1$ e ogni $\mathbf{x}$.

I rendimenti di scala

Esempio Si prenda un fattore di proporzionalità $\lambda > 1$.

La funzione di produzione CES $f(x_1, x_2) = \left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}$, con $0 \neq \rho < 1$, mostra rendimenti di scala costanti:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \left(\lambda^\rho x_1^\rho + \lambda^\rho x_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}} = \lambda \left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}} = \lambda f(x_1, x_2)$$

La funzione di produzione lineare (inputs perfetti sostituti) $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$, con $a, b > 0$ ha rendimenti di scala costanti

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda ax_1 + \lambda bx_2 = \lambda (ax_1 + bx_2) = \lambda f(x_1, x_2)$$

La funzione di produzione Leontief (inputs perfetti complementi) $f(x_1, x_2) = \min\{ax_1; bx_2\}$, con $a, b > 0$ ha rendimenti di scala costanti

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \min\{\lambda ax_1; \lambda bx_2\} = \lambda \min\{ax_1; bx_2\} = \lambda f(x)$$

I rendimenti di scala

Esempio La funzione di produzione Cobb-Douglas $f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$, con $a, b > 0$, ha rendimenti di scala che dipendono dall'ammontare della somma degli esponenti $a + b$

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^a x_1^a \lambda^b x_2^b = \lambda^{a+b} x_1^a x_2^b = \lambda^{a+b} f(x_1, x_2)$$

1. Se $a + b = 1$ la funzione di produzione ha rendimenti di scala costanti
2. Se $a + b > 1$ la funzione di produzione ha rendimenti di scala crescenti
3. Se $a + b < 1$ la funzione di produzione ha rendimenti di scala decrescenti

I rendimenti di scala

- I diversi tipi di rendimenti di scala sono associati a particolari mappe di isoquanti:
  - (*i*) se gli isoquanti sono equidistanti tra loro, la funzione di produzione mostra rendimenti di scala costanti
  - (*ii*) se gli isoquanti sono sempre più vicini tra loro, la funzione di produzione mostra rendimenti di scala crescenti
  - (*iii*) se gli isoquanti sono sempre più lontani tra loro, la funzione di produzione mostra rendimenti di scala decrescenti.

I rendimenti di scala

- Esempio (funzione di produzione Cobb-Douglas):

  (*i*) $a = b = \frac{1}{2}$. Con $x_1 = x_2 = 1$, $f(x) = 1$, con $x_1 = x_2 = 2$, $f(x) = 2$, con $x_1 = x_2 = 3$, $f(x) = 3$

  (*ii*) $a = b = 1$. Con $x_1 = x_2 = 1$, $f(x) = 1$, con $x_1 = x_2 = 2$, $f(x) = 4$, con $x_1 = x_2 = 3$, $f(x) = 9$. Quindi l'isoquanto $f(x) = 2$ passa per $x_1 = x_2 = \sqrt{2} = 1.4142$ e l'isoquanto $f(x) = 3$ passa per $x_1 = x_2 = \sqrt{3} = 1.7321$

  (*iii*) $a = b = \frac{1}{4}$. Con $x_1 = x_2 = 1$, $f(x) = 1$, con $x_1 = x_2 = 2$, $f(x) = \sqrt{2} = 1.4142$, con $x_1 = x_2 = 3$, $f(x) = \sqrt{3} = 1.7321$. Quindi l'isoquanto $f(x) = 2$ passa per $x_1 = x_2 = 4$ e l'isoquanto $f(x) = 3$ passa per $x_1 = x_2 = 9$.

I rendimenti di scala

- I rendimenti di scala sono una misura globale di come l'output risponde a variazioni proporzionali nell'utilizzo dei fattori.
- Spesso una tecnologia mostra rendimenti di scala crescenti, costanti o decrescenti soltanto in corrispondenza di certi livelli di output.
- Occorre una misura locale dei rendimenti di scala: l'*elasticità di scala* rappresenta la variazione percentuale istantanea nell'output a fronte di una variazione dell'1% di tutti i fattori ed è data da

$$e(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{K-1} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k} x_k}{f(\mathbf{x})}$$

- I rendimenti di scala sono localmente costanti, crescenti, decrescenti se $e(\mathbf{x})$ è uguale, maggiore o minore di uno, rispettivamente (Formula di Eulero).

La funzione di produzione

- Una funzione di produzione presenta rendimenti di scala costanti se e solo se è omogenea di primo grado.
- Una *funzione* di produzione è *omogenea di grado r* quando $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^r f(\mathbf{x})$ per ogni $\lambda > 0$.
- Se una funzione di produzione $f(\mathbf{x})$ è omogenea di grado r allora la pendenza delle curve di livello di $f(\mathbf{x})$ non cambia lungo un raggio qualsiasi passante dall'origine
- Se una funzione di produzione $f(\mathbf{x})$ è omogenea di grado r, allora se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$ consentono di produrre lo stesso ammontare di output, ovvero $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}')$, vale anche che $f(\lambda \mathbf{x}) = f(\lambda \mathbf{x}')$
    - Se una funzione di produzione $f(\mathbf{x})$ è omogenea di primo grado, allora se $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}') = y$ vale anche che $f(\lambda \mathbf{x}) = f(\lambda \mathbf{x}') = \lambda y$.

La funzione di produzione

- Sia $f(\mathbf{x})$ una funzione omogenea di grado r e sia g una funzione di una sola variabile monotona crescente, con $g' > 0$. Una trasformazione monotona crescente di una funzione omogenea di grado r, ovvero $h(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x}))$ si dice *funzione omotetica*
- Anche per le funzioni omotetiche la pendenza delle curve di livello non cambia lungo un raggio passante per l'origine.
- Se $h(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}')$ allora vale anche $h(\lambda\mathbf{x}) = h(\lambda\mathbf{x}')$ per ogni $\lambda > 0$.