Decisioni di produzione II

Profitti

Nadia Burani

Università di Bologna

A.A. 2017/18

In sintesi

- Il problema decisionale dell'impresa:
    - il problema diretto
- La massimizzazione del profitto
    - La funzione di profitto
    - La funzione di offerta dell'output
    - Le funzioni di domanda degli inputs

L'impresa

- Dopo avere esaminato i vincoli (tecnologici) che l'impresa fronteggia, si comincia ad analizzare il comportamento dell'impresa.
- Si assume che l'impresa produca un solo output y combinando $K-1$ fattori x_k e che la tecnologia dell'impresa sia descritta dalla funzione di produzione $f(\mathbf{x})$.
- Si assume che l'impresa fronteggi il prezzo $p > 0$ per l'output e il vettore $\mathbf{w} \gg 0$ di prezzi degli inputs che sono dati.
- Si assume che l'obiettivo dell'impresa sia la massimizzazione del profitto, ovvero della differenza tra i ricavi derivanti dalla vendita dell'output e i costi necessari per acquisire i fattori.

La massimizzazione del profitto

- Per massimizzare il profitto l'impresa deve decidere congiuntamente:
  1. quanto output y produrre
  2. quale combinazione di fattori utilizzare per produrre l'output desiderato y
- Se $f(\mathbf{x}) = y$ è una funzione di produzione che rappresenta una tecnologia regolare, monotona e convessa, il problema dell'impresa si riduce a:

$$\max_{\mathbf{x} \geq 0} pf(\mathbf{x}) - \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} \tag{PMP}$$

La massimizzazione del profitto

- La soluzione al PMP $\mathbf{x}^*$ è caratterizzata dalle condizioni di prim'ordine (Kuhn-Tucker) per ogni $k = 1, ..., K-1$:

$$p\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k} - w_k \leq 0$$

e

$$\left(p\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k} - w_k\right) x_k = 0$$

- Se $x_k > 0$ allora

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \frac{w_k}{p}$$

ovvero il prodotto marginale del fattore k deve eguagliare il suo prezzo in termini di output.

La massimizzazione del profitto

- Se due fattori k e l sono entrambi utilizzati in quantità positive e quindi $x_k, x_l > 0$, allora

$$SMST_{k,l} \equiv \frac{\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k}}{\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_l}} = \frac{w_k}{w_l}$$

ovvero il saggio marginale di sostituzione tecnica deve essere uguale al rapporto tra i prezzi dei fattori (il rapporto al quale i due fattori vengono scambiati sul mercato).

La massimizzazione del profitto

- La condizione del secondo ordine per la massimizzazione del profitto con un solo output stabilisce che la matrice delle derivate seconde della funzione di produzione sia semidefinita negativa, ovvero

$$\mathbf{z} \cdot D^2 f(\mathbf{x})\, \mathbf{z} \leq 0$$

per qualsiasi $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{K-1}$ dove

$$D^2 f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_k \partial x_l}$$

- La funzione di produzione deve essere localmente concava nell'intorno di una scelta ottima (la funzione di produzione deve giacere al di sotto dell'iperpiano ad essa tangente)

La funzione di profitto

- La soluzione del problema di massimizzazione del profitto dipende dal vettore dei prezzi $(p, \mathbf{w})$.
- La scelta ottima degli inputs $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(p, \mathbf{w})$ fornisce le *funzioni di domanda degli inputs*
- La scelta ottima del livello di output si trova sostituendo le funzioni di domanda degli inputs nella funzione di produzione
- La scelta ottima del livello di output è data da $y^* = y(p, \mathbf{w}) = f(\mathbf{x}(p, \mathbf{w}))$ e si chiama *funzione di offerta dell'output*

Funzione di profitto La funzione di profitto dipende soltanto dai prezzi dei fattori e dell'output ed è data dalla funzione valore

$$\begin{aligned} \pi(p, \mathbf{w}) &= py^* - \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}^* \\ &= pf(\mathbf{x}^*) - \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}^* \end{aligned}$$

La funzione di profitto

- La funzione di profitto è ben definita soltanto se esiste un massimo del profitto.
- Un massimo esiste soltanto se la tecnologia mostra rendimenti di scala decrescenti.
- Se la tecnologia mostra rendimenti di scala costanti o crescenti, allora il profitto è illimitato:
  - sia $\mathbf{x}^*$ il vettore di domande dei fattori e sia $y^* = f(\mathbf{x}^*)$ l'output ottimo ai prezzi $(p, \mathbf{w})$. La funzione di profitto è data da

$$\pi^* = pf(\mathbf{x}^*) - \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}^*$$

  Si supponga di aumentare la scala della produzione del fattore $\lambda > 1$. Se la tecnologia ha rendimenti di scala non-decrescenti, allora

$$f(\lambda \mathbf{x}^*) \geq \lambda f(\mathbf{x}^*) \Leftrightarrow pf(\lambda \mathbf{x}^*) \geq p\lambda f(\mathbf{x}^*)$$

  e, sottraendo $\mathbf{w} \cdot \lambda \mathbf{x}^*$ da entrambi i lati,

$$\begin{aligned} pf(\lambda \mathbf{x}^*) - \mathbf{w} \cdot \lambda \mathbf{x}^* &\geq p\lambda f(\mathbf{x}^*) - \mathbf{w} \cdot \lambda \mathbf{x}^* \\ &\geq \lambda \left[pf(\mathbf{x}^*) - \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}^* \right] = \lambda \pi^* > \pi^* \end{aligned}$$

La funzione di profitto

- In presenza di rendimenti di scala costanti, l'unico caso di massimizzazione dei profitti in corrispondenza di un livello di output positivo e di un utilizzo dei fattori in quantità positive, è quando i profitti sono nulli
- Ma allora il livello di output prodotto non ha importanza e il piano di produzione che massimizza il profitto non è unico.
    - se, in corrispondenza dei prezzi $(p, \mathbf{w})$ e con di rendimenti di scala costanti, la scelta ottimale $(y^*, \mathbf{x}^*)$ dà profitti nulli, allora anche la scelta $(\lambda y^*, \lambda \mathbf{x}^*)$ darà profitti nulli e massimizzerà il profitto.

La funzione di profitto

- Quando la funzione di profitto esiste ed è ben definita, soddisfa alcune proprietà.

Proprietà funzione di profitto Per $p > 0$ e $\mathbf{w} \gg 0$, la funzione di profitto $\pi(p, \mathbf{w})$ è continua in p e $\mathbf{w}$ ed è:

1. omogenea di primo grado in p e $\mathbf{w}$, ovvero $\pi(\alpha p, \alpha \mathbf{w}) = \alpha \pi(p, \mathbf{w})$ per ogni $\alpha > 0$
2. crescente in p e non crescente in $\mathbf{w}$, ovvero $\frac{\partial \pi(p,\mathbf{w})}{\partial p} > 0$ e $\frac{\partial \pi(p,\mathbf{w})}{\partial w_k} \leq 0$ per ogni k
3. convessa in p e $\mathbf{w}$, ovvero $\pi(\alpha p + (1-\alpha) p', \alpha \mathbf{w} + (1-\alpha) \mathbf{w}') \leq \alpha \pi(p, \mathbf{w}) + (1-\alpha) \pi(p', \mathbf{w}')$ per ogni $\alpha \in [0, 1]$.

Le funzioni di offerta dell'output e domanda dei fattori

- Se la funzione di profitto $\pi(p, \mathbf{w})$ è differenziabile due volte e se $p > 0$ e $\mathbf{w} \gg 0$, allora la funzione di offerta di output $y(p, \mathbf{w})$ e le funzioni di domanda degli inputs $\mathbf{x}(p, \mathbf{w})$ godono delle seguenti proprietà:
  1. Omogeneità di grado zero nei prezzi p e $\mathbf{w}$: per ogni $\alpha > 0$
  $$\begin{aligned} y(\alpha p, \alpha \mathbf{w}) &= y(p, \mathbf{w}) \\ \mathbf{x}(\alpha p, \alpha \mathbf{w}) &= \mathbf{x}(p, \mathbf{w}) \end{aligned}$$
  2. Lemma di Hotelling
  $$\begin{aligned} \frac{\partial \pi(p, \mathbf{w})}{\partial p} &= y(p, \mathbf{w}) \\ \frac{\partial \pi(p, \mathbf{w})}{\partial w_k} &= -x_k(p, \mathbf{w}) \text{ per ogni } k = 1..K-1 \end{aligned}$$

Le funzioni di offerta dell'output e domanda dei fattori

- Proprietà della funzione di offerta di output $y(p, \mathbf{w})$ e delle funzioni di domanda degli inputs $\mathbf{x}(p, \mathbf{w})$:

3. Effetti di prezzo diretti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(p, \mathbf{w})}{\partial p} &\geq 0 \\ \frac{\partial x_k(p, \mathbf{w})}{\partial w_k} &\leq 0 \text{ per ogni } k = 1..K-1 \end{aligned}$$

4. Effetti di prezzo incrociati nelle domande degli inputs:

$$\frac{\partial x_k(p, \mathbf{w})}{\partial w_l} = \frac{\partial x_l(p, \mathbf{w})}{\partial w_k} \text{ per ogni } k, l = 1..K-1$$

Le funzioni di offerta dell'output e domanda dei fattori

- Proprietà della funzione di offerta di output $y\left(p,\mathbf{w}\right)$ e delle funzioni di domanda degli inputs $\mathbf{x}\left(p,\mathbf{w}\right)$:
  5. La matrice di sostituzione

$$S=\begin{pmatrix} \frac{\partial y(p,\mathbf{w})}{\partial p} & \frac{\partial y(p,\mathbf{w})}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial y(p,\mathbf{w})}{\partial w_{K-1}} \\ -\frac{\partial x_1(p,\mathbf{w})}{\partial p} & -\frac{\partial x_1(p,\mathbf{w})}{\partial w_1} & \cdots & -\frac{\partial x_1(p,\mathbf{w})}{\partial w_{K-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial x_{K-1}(p,\mathbf{w})}{\partial p} & -\frac{\partial x_{K-1}(p,\mathbf{w})}{\partial w_1} & \cdots & -\frac{\partial x_{K-1}(p,\mathbf{w})}{\partial w_{K-1}} \end{pmatrix}$$

  è simmetrica e semidefinita positiva e

$$\mathbf{z}\cdot S\mathbf{z}\geq 0$$

  per ogni vettore $\mathbf{z}\in\mathbb{R}^K$.

Le funzioni di offerta dell'output e domanda dei fattori

Dimostrazione:

2. Il Lemma di Hotelling discende dal teorema dell'inviluppo.
1. L'omogeneità di grado zero deriva dal Lemma di Hotelling e dall'omogeneità di primo grado della funzione di profitto.

Le funzioni di offerta dell'output e domanda dei fattori

3. L'offerta dell'output è non-decrescente nel prezzo dell'output (*legge dell'offerta*) e la domanda di ciascun input è non-crescente nel prezzo dell'input stesso. Per l'offerta dell'output $y(p, \mathbf{w})$, si consideri il Lemma di Hotelling e si derivino entrambi i membri per p, ovvero

$$\frac{\partial^2 \pi(p, \mathbf{w})}{\partial p^2} = \frac{\partial y(p, \mathbf{w})}{\partial p}$$

Per la domanda dell'input k, $x_k(p, \mathbf{w})$, si consideri il Lemma di Hotelling e si derivino entrambi i membri per w_k, ovvero

$$\frac{\partial^2 \pi(p, \mathbf{w})}{\partial w_k^2} = -\frac{\partial x_k(p, \mathbf{w})}{\partial w_k}.$$

La funzione di profitto $\pi(p, \mathbf{w})$ è convessa in $(p, \mathbf{w})$, quindi tutti gli elementi lungo la diagonale principale della matrice Hessiana di $\pi(p, \mathbf{w})$ sono non-negativi. Allora $\frac{\partial^2 \pi(p,\mathbf{w})}{\partial p^2} \geq 0$ e $\frac{\partial^2 \pi(p,\mathbf{w})}{\partial w_k^2} \geq 0$ da cui $\frac{\partial y(p,\mathbf{w})}{\partial p} \geq 0$ e $\frac{\partial x_k(p,\mathbf{w})}{\partial w_k} \leq 0$.

Dimostrazione:

4. La simmetria degli effetti incrociati sulle domande degli inputs deriva dalla simmetria della matrice Hessiana di $\pi(p, \mathbf{w})$.
5. La matrice di sostituzione S è la matrice Hessiana di $\pi(p, \mathbf{w})$ ed essendo la funzione di profitto convessa in $(p, \mathbf{w})$ allora la matrice Hessiana è (simmetrica e) semidefinita positiva.

Esempio Funzione di produzione CES $y = f(x_1, x_2) = \left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{\frac{\beta}{\rho}}$ con $0 \neq \rho < 1$ e $\beta < 1$.

Per ottenere una soluzione al problema della massimizzazione del profitto occorre che la funzione di produzione mostri rendimenti di scala decrescenti:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) < \lambda f(x_1, x_2) \text{ per } \lambda > 1.$$

In questo caso

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \left(\lambda^\rho x_1^\rho + \lambda^\rho x_2^\rho\right)^{\frac{\beta}{\rho}} = \lambda^\beta \left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{\frac{\beta}{\rho}} = \lambda^\beta f(x)$$

dove $\lambda^\beta f(x_1, x_2) < \lambda f(x_1, x_2)$ se e solo se $\beta < 1$.

Le funzioni di offerta dell'output e domanda dei fattori

Esempio Funzione di produzione CES $y = f(x_1, x_2) = \left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{\frac{\beta}{\rho}}$ con $0 \neq \rho < 1$ e $\beta < 1$.

La funzione obiettivo (il profitto da massimizzare) è data

$$\max_{x_1, x_2 \geq 0} \qquad \pi = p\left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{\frac{\beta}{\rho}} - w_1 x_1 - w_2 x_2$$

e le condizioni del primo ordine per una soluzione interiore sono

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1} = p\left(\frac{\beta}{\rho}\left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{\frac{\beta}{\rho}-1} \rho x_1^{\rho-1}\right) - w_1 = 0$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial x_2} = p\left(\frac{\beta}{\rho}\left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{\frac{\beta}{\rho}-1} \rho x_2^{\rho-1}\right) - w_2 = 0$$

Esempio Funzione di produzione CES $y = f(x_1, x_2) = \left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{\frac{\beta}{\rho}}$ con $0 \neq \rho < 1$ e $\beta < 1$.

Dividendo le condizioni del primo ordine si ottiene $x_1 = x_2 \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}$ e sostituendo nella seconda si ha

$$p\left(\beta\left(\left(x_2\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}\right)^\rho + x_2^\rho\right)^{\frac{\beta-\rho}{\rho}} x_2^{\rho-1}\right) = w_2.$$

Risolvendo per x_2 si ottiene

$$x_2(p, \mathbf{w}) = (p\beta)^{\frac{1}{1-\beta}} \left(w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{\beta-\rho}{\rho(1-\beta)}} (w_2)^{\frac{1}{\rho-1}}$$

che è la funzione di domanda del fattore 2.

Esempio Funzione di produzione CES $y = f(x_1, x_2) = \left(x_1^{\rho} + x_2^{\rho}\right)^{\frac{\beta}{\rho}}$ con $0 \neq \rho < 1$ e $\beta < 1$.

Sostituendo $x_2(p, \mathbf{w})$ in $x_1 = x_2 \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}$ si ottiene

$$x_1(p, \mathbf{w}) = (p\beta)^{\frac{1}{1-\beta}} \left(w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{\beta-\rho}{\rho(1-\beta)}} (w_1)^{\frac{1}{\rho-1}}$$

che è la funzione di domanda del fattore 1. La funzione di offerta dell'output è data da

$$y = f(x_1(p, \mathbf{w}), x_2(p, \mathbf{w})) = \left(x_1(p, \mathbf{w})^{\rho} + x_2(p, \mathbf{w})^{\rho}\right)^{\frac{\beta}{\rho}}$$

ovvero

$$y(p, \mathbf{w}) = (p\beta)^{\frac{\beta}{1-\beta}} \left(w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{\beta(1-\rho)}{\rho(1-\beta)}}$$

Le funzioni di offerta dell'output e domanda dei fattori

Esempio Funzione di produzione CES $y = f(x_1, x_2) = \left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{\frac{\beta}{\rho}}$ con $0 \neq \rho < 1$ e $\beta < 1$.

Sostituendo in π le funzioni di offerta dell'output e di domanda dei fattori si ottiene la funzione di profitto

$$\pi(p, \mathbf{w}) = py(p, \mathbf{w}) - w_1 x_1(p, \mathbf{w}) - w_2 x_2(p, \mathbf{w})$$

ovvero

$$\pi(p, \mathbf{w}) = (1-\beta)\,\beta^{\frac{\beta}{1-\beta}} p^{\frac{1}{1-\beta}} \left(w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{\beta(1-\rho)}{\rho(1-\beta)}}$$

Le funzioni di offerta dell'output e domanda dei fattori

Esempio Funzione di produzione Cobb Douglas $y = f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$ con $a, b > 0$ e $a + b < 1$.

La funzione obiettivo è data

$$\max_{x_1, x_2 \geq 0} \qquad \pi = p x_1^a x_2^b - w_1 x_1 - w_2 x_2$$

e le condizioni del primo ordine sono

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1} = p a x_1^{a-1} x_2^b - w_1 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_2} = p b x_1^a x_2^{b-1} - w_2 = 0$$

Esempio Funzione di produzione Cobb Douglas $y = f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$ con $a, b > 0$ e $a + b < 1$.

Dividendo le condizioni del primo ordine si ottiene $x_2 = x_1 \left(\frac{bw_1}{aw_2} \right)$ e sostituendo nella prima si ha

$$pax_1^{a-1} \left(x_1 \left(\frac{bw_1}{aw_2} \right) \right)^b = w_1$$

Risolvendo per x_1 si ottiene

$$x_1(p, \mathbf{w}) = \left(p \left(\frac{a}{w_1} \right)^{1-b} \left(\frac{b}{w_2} \right)^b \right)^{\frac{1}{1-(a+b)}}$$

che è la funzione di domanda del fattore 1.

Esempio Funzione di produzione Cobb Douglas $y = f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$ con $a, b > 0$ e $a + b < 1$.
Sostituendo $x_1(p, \mathbf{w})$ in $x_2 = x_1 \left(\frac{bw_1}{aw_2}\right)$ si ottiene

$$x_2(p, \mathbf{w}) = \left(p \left(\frac{a}{w_1}\right)^a \left(\frac{b}{w_2}\right)^{1-a} \right)^{\frac{1}{1-(a+b)}}$$

che è la funzione di domanda del fattore 2. La funzione di offerta dell'output è data da

$$y = f(x_1(p, \mathbf{w}), x_2(p, \mathbf{w})) = (x_1(p, \mathbf{w}))^a (x_2(p, \mathbf{w}))^b$$

ovvero

$$y(p, \mathbf{w}) = \left(p^{a+b} \left(\frac{a}{w_1}\right)^a \left(\frac{b}{w_2}\right)^b \right)^{\frac{1}{1-(a+b)}}$$

Esempio Funzione di produzione Cobb Douglas $y = f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$ con $a, b > 0$ e $a + b < 1$.

Sostituendo in π le funzioni di offerta dell'output e di domanda dei fattori si ottiene la funzione di profitto

$$\pi(p, \mathbf{w}) = py(p, \mathbf{w}) - w_1 x_1(p, \mathbf{w}) - w_2 x_2(p, \mathbf{w})$$

ovvero

$$\pi(p, \mathbf{w}) = (1 - (a + b)) \left(p \left(\frac{a}{w_1} \right)^a \left(\frac{b}{w_2} \right)^b \right)^{\frac{1}{1-(a+b)}}$$