Decisioni di produzione III

Costi

Nadia Burani

Università di Bologna

A.A. 2017/18

In sintesi

- Secondo problema decisionale dell'impresa: il problema duale
- La minimizzazione dei costi
  - Le funzioni di domanda condizionata dei fattori
  - La funzione di costo
- Relazione tra problema diretto e duale
- Costi di breve e di lungo periodo
- Costi medi e marginali
- La geometria dei costi

La minimizzazione dei costi

- Il problema di minimizzazione dei costi (PmC) è il problema duale rispetto alla massimizzazione del profitto (PMP)
- Il PmC presenta vantaggi rispetto al PMP:
  - è sempre ben definito indipendentemente dai rendimenti di scala dell'impresa.
  - si applica anche all'analisi del comportamento di imprese che non operano in mercati dell'output concorrenziali (monopolio, oligopolio)
- Si assume che l'impresa possa combinare $K-1$ fattori x_k per produrre un solo output y e che la tecnologia dell'impresa sia descritta dalla funzione di produzione $f(\mathbf{x})$.
  - l'impresa desidera raggiungere un particolare livello di output $y > 0$
- Si assume che l'impresa fronteggi il vettore $\mathbf{w} \gg 0$ di prezzi degli inputs che sono dati.

- Il problema dell'impresa consiste nel trovare la combinazione degli inputs meno costosa per produrre un livello di output pari almeno a y.
- Analiticamente, l'impresa risolve il seguente problema di minimizzazione vincolata

$$\begin{aligned} \min_{x \geq 0} \quad & \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} \\ \text{s.v.} \quad & f(\mathbf{x}) \geq y \end{aligned} \tag{PmC}$$

- La Lagrangiana associata a questo problema è

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} - \lambda (f(\mathbf{x}) - y)$$

- La soluzione del PmC $\mathbf{x}^*$ è caratterizzata dalle condizioni di prim'ordine (Kuhn-Tucker) per ogni $k = 1, ..., K - 1$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x_k} = w_k - \lambda \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k} \geq 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x_k} x_k = \left(w_k - \lambda \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right) x_k = 0$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \lambda} = f(\mathbf{x}) - y \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \lambda} \lambda = (f(\mathbf{x}) - y) \lambda = 0$$

La minimizzazione dei costi

- Se $y > 0$, allora la regolarità di $V(y)$ assicura che ci sia almeno un input per il quale $x_k > 0$
- La monotonicità di $V(y)$ assicura che $\lambda > 0$ e quindi il vincolo varrà sempre con eguaglianza $f(\mathbf{x}) = y$.
- Se $V(y)$ è strettamente convesso allora la soluzione al PmC $\mathbf{x}^*$ è unica
- Se due fattori k e l sono entrambi utilizzati in quantità positive e quindi $x_k, x_l > 0$, allora

$$SMST_{k,l} \equiv \frac{\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k}}{\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_l}} = \frac{w_k}{w_l}$$

  che è la stessa condizione trovata per la massimizzazione del profitto
- Nel caso di due soli inputs la condizione precedente descrive la tangenza tra l'isoquanto di livello y e la retta di isocosto più bassa possibile compatibile con quell'isoquanto.

La funzione di costo e le domande condizionate dei fattori

- La soluzione al problema di minimizzazione dei costi si chiama *funzione di domanda condizionata dei fattori*, si denota con $\mathbf{x}(\mathbf{w}, y)$ e fornisce la quantità di ciascun input che minimizza i costi per produrre y unità di output.
- La *funzione di costo* indica il costo minimo in corrispondenza dei prezzi dei fattori $\mathbf{w}$ e del livello di produzione y ovvero

$$c(\mathbf{w}, y) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{w}, y)$$

- Il PmC è formalmente uguale al problema di minimizzazione della spesa:
  - le funzioni di domanda condizionata dei fattori equivalgono alle domande hicksiane
  - la funzione di costo equivale alla funzione di spesa.

La funzione di costo e le domande condizionate dei fattori

- Il moltiplicatore di Lagrange indica il valore marginale di rilassare il vincolo e quindi è uguale al costo marginale dell'output ovvero

$$\lambda = \frac{\partial c(\mathbf{w}, y)}{\partial y}.$$

Dimostrazione Si prenda la funzione di costo e la si derivi rispetto all'output y

$$\frac{\partial c(\mathbf{w}, y)}{\partial y} = \sum_{k=1}^{K-1} w_k \frac{\partial x_k(\mathbf{w}, y)}{\partial y}.$$

Dalle condizioni del prim'ordine del PmC si ha $w_k = \lambda \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k}$. Sostituendo dentro la sommatoria si ottiene

$$\frac{\partial c(\mathbf{w}, y)}{\partial y} = \lambda \sum_{k=1}^{K-1} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k} \frac{\partial x_k(\mathbf{w}, y)}{\partial y} = \lambda,$$

visto che differenziando entrambi i lati del vincolo rispetto a y si ottiene $\sum_{k=1}^{K-1} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k} \frac{\partial x_k(\mathbf{w}, y)}{\partial y} = 1$.

La funzione di costo e le domande condizionate dei fattori

Proprietà funzione di costo Sia $V(y)$ regolare negli inputs e monotono e siano $\mathbf{w} \gg 0$ e $y > 0$. Allora la funzione di costo $c(\mathbf{w}, y)$ è continua ed è:

1. omogenea di grado uno in $\mathbf{w}$: $c(\alpha \mathbf{w}, y) = \alpha c(\mathbf{w}, y)$ per ogni $\alpha > 0$
2. crescente in y e non decrescente in $\mathbf{w}$: $c(\mathbf{w}, y') > c(\mathbf{w}, y)$ per ogni $y' > y$ e $c(\mathbf{w}', y) \geq c(\mathbf{w}, y)$ per ogni $\mathbf{w}' \geq \mathbf{w}$.
3. concava in $\mathbf{w}$: $c(\alpha \mathbf{w} + (1-\alpha)\mathbf{w}', y) \geq \alpha c(\mathbf{w}, y) + (1-\alpha) c(\mathbf{w}', y)$ per ogni $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \mathbb{R}^{K-1}$ e ogni $\alpha \in [0, 1]$.

La funzione di costo e le domande condizionate dei fattori

Proprietà domande condizionate Se la funzione di costo $c(\mathbf{w}, y)$ è derivabile due volte, allora le funzioni di domanda condizionata dei fattori $\mathbf{x}(\mathbf{w}, y)$ sono:

1. omogenee di grado zero in $\mathbf{w} : \mathbf{x}(\alpha \mathbf{w}, y) = \mathbf{x}(\mathbf{w}, y)$ per ogni $\alpha > 0$
2. non decrescenti in $y : \mathbf{x}(\mathbf{w}, y') \geq \mathbf{x}(\mathbf{w}, y)$ per ogni $y' > y$
3. vale il Lemma di Shephard

$$\frac{\partial c(\mathbf{w}, y)}{\partial w_k} = x_k(\mathbf{w}, y)$$

La funzione di costo e le domande condizionate dei fattori

Proprietà domande condizionate Se la funzione di costo $c(w, y)$ è derivabile due volte, allora le funzioni di domanda condizionata dei fattori $\mathbf{x}(\mathbf{w}, y)$ sono tali che:

4. l'effetto di prezzo diretto $\frac{\partial x_k(\mathbf{w},y)}{\partial w_k} = \frac{\partial^2 c(\mathbf{w},y)}{\partial w_k^2}$ è negativo per ogni k
5. gli effetti di prezzo incrociati sono simmetrici per ogni k, l

$$\frac{\partial^2 c(\mathbf{w}, y)}{\partial w_k \partial w_l} = \frac{\partial x_k(\mathbf{w}, y)}{\partial w_l} = \frac{\partial x_l(\mathbf{w}, y)}{\partial w_k} = \frac{\partial^2 c(\mathbf{w}, y)}{\partial w_l \partial w_k}$$

6. la matrice di sostituzione $D_{\mathbf{w}}\mathbf{x}(\mathbf{w}, y)$, i cui termini sono $\frac{\partial x_k(\mathbf{w},y)}{\partial w_l} = \frac{\partial^2 c(\mathbf{w},y)}{\partial w_k \partial w_l}$, è simmetrica e semidefinita negativa, ovvero

$$\mathbf{z} \cdot D_{\mathbf{w}}\mathbf{x}(\mathbf{w}, y)\,\mathbf{z} \leq 0$$

per ogni vettore $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{K-1}$

Esempio Si consideri il problema di mimizzazione dei costi con una tecnologia descritta dalla funzione di produzione CES $f(x_1, x_2) = \left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}$ con $0 \neq \rho < 1$ e rendimenti di scala costanti.

Le condizioni del primo ordine, considerando una soluzione interiore sono

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} &= w_1 - \lambda\left(\frac{1}{\rho}\left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-1} \rho x_1^{\rho-1}\right) = 0 \quad (1)\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} &= w_2 - \lambda\left(\frac{1}{\rho}\left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-1} \rho x_2^{\rho-1}\right) = 0 \quad (2)\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= \left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}} - y = 0 \quad (3)
\end{aligned}$$

Dividendo la (1) per la (2) si ottiene

$$x_1 = x_2\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} \quad (4)$$

Esempio Funzione di produzione CES $f(x_1, x_2) = \left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}$.
Sostituendo la (4) nella (3) si ottiene

$$y = \left(\left(x_2 \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^{\frac{1}{\rho - 1}} \right)^\rho + x_2^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}}$$

e risolvendo rispetto a x_2 si trova la domanda condizionata del fattore 2

$$x_2(\mathbf{w}, y) = \frac{y w_2^{\frac{1}{\rho-1}}}{\left(w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^{\frac{1}{\rho}}}$$

e sostituendo nella (4) si trova la domanda del fattore 1

$$x_1(\mathbf{w}, y) = \frac{y w_2^{\frac{1}{\rho-1}}}{\left(w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^{\frac{1}{\rho}}} \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^{\frac{1}{\rho-1}} = \frac{y w_1^{\frac{1}{\rho-1}}}{\left(w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^{\frac{1}{\rho}}}$$

Esempio Funzione di produzione CES $f(x_1, x_2) = \left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}$ con $0 \neq \rho < 1$.

Inserendo le funzioni di domanda condizionata dei fattori nell' espressione dei costi si trova la funzione di costo

$$c(\mathbf{w}, y) = w_1 x_1(\mathbf{w}, y) + w_2 x_2(\mathbf{w}, y)$$

ovvero

$$c(\mathbf{w}, y) = w_1 \frac{y w_1^{\frac{1}{\rho-1}}}{\left(w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{1}{\rho}}} + w_2 \frac{y w_2^{\frac{1}{\rho-1}}}{\left(w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{1}{\rho}}}$$

da cui

$$c(\mathbf{w}, y) = y\left(w_1^{\frac{\rho}{(\rho-1)}} + w_2^{\frac{\rho}{(\rho-1)}}\right)^{\frac{(\rho-1)}{\rho}}$$

Esempio Si consideri il problema di mimizzazione dei costi con una tecnologia descritta dalla funzione di produzione lineare $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$ con $a, b > 0$ e rendimenti di scala costanti.

Le condizioni del primo ordine, considerando la possibilità di una soluzione d'angolo sono

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = w_1 - \lambda a \geq 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} x_1 = (w_1 - \lambda a) x_1 = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = w_2 - \lambda b \geq 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} x_2 = (w_2 - \lambda b) x_2 = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = ax_1 + bx_2 - y = 0 \tag{9}$$

Esempio Funzione di produzione lineare $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$ con $a, b > 0$.

Ci sono tre casi da considerare: (a) Se la soluzione è interiore, $x_1, x_2 > 0$, valgono le condizioni (6) e (8) da cui $w_1 = \lambda a$ e $w_2 = \lambda b$ e, prendendo il rapporto

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{a}{b}.$$

In questo caso, qualsiasi combinazione di fattori che soddisfi il vincolo, ovvero qualsiasi combinazione di fattori sull'isoquanto $y = ax_1 + bx_2$ rappresenta una scelta ottimale.

La funzione di costo e le domande condizionate dei fattori

Esempio Funzione di produzione lineare $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$ con $a, b > 0$.

(b) Si acquista solo l'input 1, $x_1 > 0$ e $x_2 = 0$: in questo caso, valgono le condizioni (6) e (7) da cui $\lambda = \frac{w_1}{a}$ e

$$\frac{w_1}{w_2} \leq \frac{a}{b}$$

quindi la combinazione di fattori ottimale è $x_2 = 0$ e, dall'isoquanto, $x_1 = \frac{y}{a}$.

(c) Si acquista solo l'input 2, $x_1 = 0$ e $x_2 > 0$: in questo caso valgono le condizioni (5) e (8) da cui $\lambda = \frac{w_2}{b}$ e

$$\frac{w_1}{w_2} \geq \frac{a}{b}$$

quindi la combinazione di fattori ottimale è $x_1 = 0$ e, dall'isoquanto, $x_2 = \frac{y}{b}$.

La funzione di costo e le domande condizionate dei fattori

Esempio Funzione di produzione lineare $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$ con $a, b > 0$.

La funzione di costo è data da: (b) se $\frac{w_1}{w_2} \leq \frac{a}{b}$ allora $x_1 = \frac{y}{a}$ e $x_2 = 0$, e

$$c(\mathbf{w}, y) = \frac{w_1 y}{a}$$

(c) se $\frac{w_1}{w_2} \leq \frac{a}{b}$ allora $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{y}{b}$, e

$$c(\mathbf{w}, y) = \frac{w_2 y}{b}$$

Combinando i tre casi

$$c(\mathbf{w}, y) = y \min\left\{\frac{w_1}{a}; \frac{w_2}{b}\right\}$$

Esempio Funzione di produzione Cobb-Douglas $f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$ con $a, b > 0$.

Le funzioni di domanda condizionata dei fattori sono

$$\begin{aligned} x_1(w_1, w_2, y) &= y^{\frac{1}{a+b}} \left(\frac{a w_2}{b w_1}\right)^{\frac{b}{a+b}} \\ x_2(w_1, w_2, y) &= y^{\frac{1}{a+b}} \left(\frac{b w_1}{a w_2}\right)^{\frac{a}{a+b}} \end{aligned}$$

e la funzione di costo è

$$c(w_1, w_2, y) = (a+b)\, y^{\frac{1}{a+b}} \left[\left(\frac{w_1}{a}\right)^a \left(\frac{w_2}{b}\right)^b\right]^{\frac{1}{a+b}}$$

La funzione di costo e i rendimenti di scala

- Se la funzione di produzione presenta rendimenti di scala costanti allora la funzione di costo è lineare nell'output y e $\frac{\partial^2 c(\mathbf{w},y)}{\partial y^2} = 0$.
- Se la funzione di produzione presenta rendimenti di scala crescenti allora la funzione di costo è concava nell'output y e $\frac{\partial^2 c(\mathbf{w},y)}{\partial y^2} < 0$
- Se la funzione di produzione presenta rendimenti di scala decrescenti allora la funzione di costo è convessa nell'output y e $\frac{\partial^2 c(\mathbf{w},y)}{\partial y^2} > 0$

La funzione di costo e le domande condizionate dei fattori

- Se la funzione di produzione presenta rendimenti di scala costanti allora la funzione di costo è lineare nell'output y e può essere scritta come $c(\mathbf{w}, y) = yc(\mathbf{w}, 1)$ dove $c(\mathbf{w}, 1)$ rappresenta il costo di produrre 1 unità di output.
- Se la funzione di produzione presenta rendimenti di scala costanti allora le funzioni di domanda condizionata dei fattori sono lineari nell'output y e possono essere scritte come $x(\mathbf{w}, y) = yx(\mathbf{w}, 1)$ dove $x(\mathbf{w}, 1)$ rappresenta le domande dei fattori necessari per produrre 1 unità di output.

La relazione tra PMP e PmC

- Il problema di minimizzazione dei costi è il problema duale rispetto al problema di massimizazione del profitto.
- Conoscendo la funzione di costo $c\left(\mathbf{w}, y\right)$ possiamo riscrivere il problema di massimizzazione del profitto come

$$\max_{y \geq 0} \qquad py - c\left(\mathbf{w}, y\right)$$

- La condizione del prim'ordine per un ottimo interiore $y^* > 0$ è data da

$$p - \frac{\partial c\left(\mathbf{w}, y\right)}{\partial y} = 0$$

ovvero dall'ugualglianza di prezzo e costo marginale.

- Le condizioni del prim'ordine di PmC sono identiche a quelle del PMP se e solo se $p = \lambda$.

La relazione tra PMP e PmC

Esempio Funzione di produzione Cobb-Douglas $f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$ con $a, b > 0$.

La funzione di costo è

$$c(w_1, w_2, y) = y^{\frac{1}{a+b}} \left[\left(\frac{w_1}{a} \right)^a \left(\frac{w_2}{b} \right)^b \right]^{\frac{1}{a+b}} (a+b)$$

Il profitto, come funzione dell'output soltanto $\pi(y)$ è dato da

$$\begin{aligned} \pi(y) &= py - c(\mathbf{w}, y) \\ &= py - y^{\frac{1}{a+b}} \left[\left(\frac{w_1}{a} \right)^a \left(\frac{w_2}{b} \right)^b \right]^{\frac{1}{a+b}} (a+b) \\ &= py - y^{\frac{1}{a+b}} \phi(w_1, w_2)(a+b) \end{aligned}$$

La relazione tra PMP e PmC

Esempio Funzione di produzione Cobb-Douglas $f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$ con $a, b > 0$.

La condizione del prim'ordine è data da

$$p - y^{\frac{1-(a+b)}{a+b}} \phi(w_1, w_2) \leq 0$$

che vale con eguaglianza se $y > 0$.

Quando $1 - (a + b) = 0$ (rendimenti di scala costanti), la condizione del prim'ordine è indipendente da y.

- Se $p < \phi(w_1, w_2)$ allora $y^* = 0$
- se $p = \phi(w_1, w_2)$ allora qualsiasi livello di output è una soluzione e genera profitti nulli
- se $p > \phi(w_1, w_2)$ allora il problema non ha soluzione perché si possono ottenere profitti illimitati aumentando l'output.

La relazione tra PMP e PmC

Esempio Funzione di produzione Cobb-Douglas $f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$ con $a, b > 0$.

Quando $1 - (a+b) > 0$ (rendimenti di scala decrescenti) il problema ha un'unica soluzione data da

$$y(p, w_1, w_2) = \left[p^{a+b} \left(\frac{a}{w_1} \right)^a \left(\frac{b}{w_2} \right)^b \right]^{\frac{1}{1-(a+b)}}$$

che è la funzione di offerta dell'output trovata nel PMP.

Le funzioni di domanda degli inputs si ricavano sostituendo $y(p, w_1, w_2)$ nelle funzioni di domanda condizionata dei fattori, ovvero

$$x_k(p, w_1, w_2) = x_k(w_1, w_2, y(p, w_1, w_2)) \text{ per } k = 1, 2$$

La funzione di profitto si trova come

$$\pi(p, w_1, w_2) = py(p, w_1, w_2) - \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}(w_1, w_2, y(p, w_1, w_2)).$$

La relazione tra PMP e PmC

Esempio Funzione di produzione Cobb-Douglas $f\left(x_1, x_2\right) = x_1^a x_2^b$ con $a, b > 0$.

La condizione del prim'ordine è data da

$$p - y^{\frac{1-(a+b)}{a+b}} \phi\left(w_1, w_2\right) \leq 0$$

che vale con eguaglianza se $y > 0$.

Quando $1 - (a + b) < 0$ (rendimenti di scala crescenti) un livello di output che risolve la condizione del prim'ordine sarebbe un minimo dei profitti.

E' sempre possibile aumentare i profitti aumentando l'output quindi il problema non ha soluzione.

Costi di breve e di lungo periodo

- La funzione di costo considerata finora è una *funzione di costo di lungo periodo*
  - nello scegliere la combinazione di inputs che minimizza il costo, l'impresa può liberamente acquistare la quantità di ogni inputs.
- Nel *breve periodo* l'impresa può essere vincolata ad acquistare soltanto certe quantità di certi inputs
  - si considera la *funzione di costo ristretta o di breve periodo*

Costi di breve periodo

Funzione di costo di breve periodo Sia $f(\mathbf{z})$ la funzione di produzione dove $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}})$ è un vettore composto da fattori variabili $\mathbf{x}$ e da fattori fissi $\overline{\mathbf{x}}$; sia $\mathbf{w}$ il vettore dei prezzi dei fattori variabili e $\overline{\mathbf{w}}$ il vettore dei prezzi dei fattori fissi. La funzione di costo ristretta o di breve periodo è data da

$$\min_{\mathbf{x} \geq 0} \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + \overline{\mathbf{w}} \cdot \overline{\mathbf{x}} \tag{10}$$
$$\text{s. v. } f(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}}) \geq y$$

Se le domande condizionate dei fattori $\mathbf{x}_{BP}(\mathbf{w}, \overline{\mathbf{w}}, y, \overline{\mathbf{x}})$ risolvono (10), allora

$$c_{BP}(\mathbf{w}, \overline{\mathbf{w}}, y, \overline{\mathbf{x}}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_{BP}(\mathbf{w}, \overline{\mathbf{w}}, y, \overline{\mathbf{x}}) + \overline{\mathbf{w}} \cdot \overline{\mathbf{x}}$$

- Il termine $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_{BP}(\mathbf{w}, \overline{\mathbf{w}}, y, \overline{\mathbf{x}})$ è detto costo variabile di breve periodo.
- Il termine $\overline{\mathbf{w}} \cdot \overline{\mathbf{x}}$ è detto costo fisso di breve periodo.

Costi medi e costi marginali

- Si possono definire altri concetti di costo partendo dai precedenti:
  - costo medio totale di breve periodo

$$\frac{c_{BP}\left(\mathbf{w}, \overline{\mathbf{w}}, y, \overline{\mathbf{x}}\right)}{y} = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_{BP}\left(\mathbf{w}, \overline{\mathbf{w}}, y, \overline{\mathbf{x}}\right)}{y} + \frac{\overline{\mathbf{w}} \cdot \overline{\mathbf{x}}}{y}$$

  - costo medio variabile di breve periodo

$$\frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_{BP}\left(\mathbf{w}, \overline{\mathbf{w}}, y, \overline{\mathbf{x}}\right)}{y}$$

  - costo medio fisso di breve periodo

$$\frac{\overline{\mathbf{w}} \cdot \overline{\mathbf{x}}}{y}$$

  - costo marginale di breve periodo

$$\frac{\partial c_{BP}\left(\mathbf{w}, \overline{\mathbf{w}}, y, \overline{\mathbf{x}}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left[\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_{BP}\left(\mathbf{w}, \overline{\mathbf{w}}, y, \overline{\mathbf{x}}\right)\right]}{\partial y}$$

Costi di breve periodo

Esempio Funzione di produzione CES $f(x_1, x_2) = \left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}$ con $0 \neq \rho < 1$.

Sia x_2 il fattore fisso in quantità $\overline{x}_2$. Il vincolo del problema di minimizzazione dei costi diventa

$$\left(x_1^\rho + \overline{x}_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}} = y$$

e risolvendolo per x_1 si ottiene

$$x_{1BP}(y, \overline{x}_2) = \left(y^\rho - \overline{x}_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

La funzione di costo di breve periodo è

$$c_{BP}(w_1, \overline{w}_2, y, \overline{x}_2) = w_1 \left(y^\rho - \overline{x}_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}} + \overline{w}_2 \overline{x}_2$$

Esempio Funzione di produzione CES $f(x_1, x_2) = \left(x_1^\rho + x_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}$ con $0 \neq \rho < 1$.

Il costo medio di breve periodo è

$$\frac{c_{BP}\left(w_1, \overline{w}_2, y, \overline{x}_2\right)}{y} = \frac{w_1 \left(y^\rho - \overline{x}_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}}{y} + \frac{\overline{w}_2 \overline{x}_2}{y}$$

Il costo marginale di breve periodo è

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_{BP}\left(w_1, \overline{w}_2, y, \overline{x}_2\right)}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} w_1 \left(y^\rho - \overline{x}_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-1} \rho y^{\rho-1} \\ &= w_1 \left(y^\rho - \overline{x}_2^\rho\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}} y^{\rho-1} \end{aligned}$$

Costi di breve e di lungo periodo

- I fattori fissi entrano come parametri (vincoli addizionali) nel problema di minimizzazione dei costi di breve periodo
- I costi di lungo periodo non possono mai essere maggiori dei costi di breve periodo perché nel breve periodo l'impresa non può scegliere ottimamente tutti i fattori

$$c_{BP}\left(\mathbf{w}, \overline{\mathbf{w}}, y, \overline{\mathbf{x}}\right) \geq c\left(\mathbf{w}, y\right)$$

- I costi di lungo e di breve periodo coincidono soltanto in corrispondenza di un particolare livello di output y^* per il quale, dati i prezzi dei fattori, l'impresa avrebbe scelto esattamente $\overline{\mathbf{x}}$ unità dei fattori fissi se fosse stato possibile scegliere.
    - le curve di costo di breve e di lungo periodo dovranno essere tangenti tra loro in corrispondenza di y^*.

Costi di breve e di lungo periodo

- Sia $\overline{\mathbf{x}}(y)$ la scelta ottimale dei fattori fissi che minimizza i costi di breve periodo di produrre l'output y ai dati prezzi dei fattori $\mathbf{w}$ e $\overline{\mathbf{w}}$, allora

$$c_{BP}\left(\mathbf{w}, \overline{\mathbf{w}}, y, \overline{\mathbf{x}}(y)\right) = c\left(\mathbf{w}, \overline{\mathbf{w}}, y\right) \tag{11}$$

- La (11) deve valere per ogni livello di output, quindi derivando entrambi i membri rispetto a y si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial c_{BP}\left(\mathbf{w}, \overline{\mathbf{w}}, y, \overline{\mathbf{x}}(y)\right)}{\partial y} &= \frac{\partial c_{BP}\left(\mathbf{w}, \overline{\mathbf{w}}, y, \overline{\mathbf{x}}(y)\right)}{\partial y} + \\ &+ \sum_k \frac{\partial c_{BP}\left(\mathbf{w}, \overline{\mathbf{w}}, y, \overline{\mathbf{x}}(y)\right)}{\partial \overline{x}_k(y)} \frac{\partial \overline{x}_k(y)}{\partial y}\end{aligned}$$

- Essendo $\overline{\mathbf{x}}(y)$ la scelta ottimale che minimizza i costi di breve periodo, devono valere le condizioni di primo ordine per un minimo, ovvero $\frac{\partial c_{BP}(\mathbf{w}, \overline{\mathbf{w}}, y, \overline{\mathbf{x}}(y))}{\partial \overline{x}_k(y)} = 0$ per ogni fattore fisso k.Quindi

$$\frac{\partial c_{BP}\left(\mathbf{w}, \overline{\mathbf{w}}, y, \overline{\mathbf{x}}(y)\right)}{\partial y} = \frac{\partial c\left(\mathbf{w}, \overline{\mathbf{w}}, y\right)}{\partial y}$$

Costi di breve e di lungo periodo

- Ne consegue che la pendenza della curva di costo di breve periodo è uguale alla pendenza del costo di lungo periodo in corrispondenza del livello di output per il quale la domanda dei fattori fissi è $\bar{\mathbf{x}}(y)$.
- Se si fissano i prezzi dei fattori e si considera la funzione di costo come dipendente solo da y, allora, nello spazio $(y, c(y))$, i costi di breve e di lungo periodo sono tangenti in corrispondenza di un qualche livello di output y^*.
- Le curve di costo totale di lungo periodo sono l'inviluppo inferiore delle curve di costo di breve periodo.
- Se le curve di costo totale di breve e di lungo periodo sono tangenti in corrispondenza di y^*, allora anche le curve del costo medio di breve e di lungo periodo sono tangenti in corrispondenza di y^*.
- Le curve di costo medio totale di lungo periodo sono l'inviluppo inferiore delle curve di costo medio totale di breve periodo.

Geometria dei costi

- Nel breve periodo si ritiene che la curva del costo medio sia prima decrescente poi crescente.
- Il costo medio di breve periodo è dato da

$$\begin{aligned}\frac{c_{BP}\left(\mathbf{w},\overline{\mathbf{w}},y,\overline{\mathbf{x}}\right)}{y} &= \frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_{BP}\left(\mathbf{w},\overline{\mathbf{w}},y,\overline{\mathbf{x}}\right)}{y}+\frac{\overline{\mathbf{w}}\cdot\overline{\mathbf{x}}}{y}\\ &= CVMe_{BP}+CFMe_{BP}\end{aligned}$$

- I costi fissi medi decrescono sempre all'aumentare dell'output.
- Cosa accade ai costi variabili medi se l'output aumenta?

Geometria dei costi

- All'aumentare dell'output, i costi variabili medi possono inizialmente diminuire se vi sono economie di scala.
- I costi variabili medi possono essere lineari fino a che non si raggiunge il livello di capacità produttiva determinato dai fattori fissi:
  - l'impiego dei fattori variabili aumenta in modo più o meno lineare fino al limite della capacità produttiva
- Dopo di che, i costi variabili medi crescono all'aumentare dell'output:
  - bisogna utilizzare una quantità di inputs variabili più che proporzionale per aumentare l'output.

Geometria dei costi

- I costi totali medi di breve periodo hanno un andamento a U:
  - la diminuzione iniziale dei costi medi totali è dovuta ai costi fissi medi
  - l'aumento successivo è dovuto ai costi variabili medi.
- Il livello di output y^* in corrispondenza del quale il costo medio totale di breve periodo è minimo si chiama *scala minima efficiente.*

Geometria dei costi

- Qual è la relazione tra la curva del costo marginale e la curva dei costi medi di breve periodo?
- Si consideri il costo medio totale di breve periodo $\frac{c_{BP}(y,\bar{\mathbf{x}})}{y}$ e sia y^* la scala minima efficiente.
- I costi medi totali di breve periodo sono decrescenti in y alla sinistra di y^* quindi
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c_{BP}\left(y,\bar{\mathbf{x}}\right)}{y}\right) \leq 0 \text{ per } y \leq y^*;$$
derivando
$$\frac{\frac{\partial c_{BP}(y,\bar{\mathbf{x}})}{\partial y} y - c_{BP}\left(y,\bar{\mathbf{x}}\right)}{y^2} \leq 0 \text{ per } y \leq y^*$$
ovvero
$$\frac{\partial c_{BP}\left(y,\bar{\mathbf{x}}\right)}{\partial y} \leq \frac{c_{BP}\left(y,\bar{\mathbf{x}}\right)}{y} \text{per } y \leq y^*$$
il costo marginale è inferiore al costo medio alla sinistra di y^*.

Geometria dei costi

- Analogamente i costi medi totali di breve periodo sono crescenti in y alla destra di y^* quindi

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c_{BP}\left(y,\overline{\mathbf{x}}\right)}{y}\right) \geq 0 \text{ per } y \geq y^*;$$

  derivando

$$\frac{\frac{\partial c_{BP}(y,\overline{\mathbf{x}})}{\partial y}y - c_{BP}\left(y,\overline{\mathbf{x}}\right)}{y^2} \geq 0 \text{ per } y \geq y^*$$

  ovvero

$$\frac{\partial c_{BP}\left(y,\overline{x}\right)}{\partial y} \geq \frac{c_{BP}\left(y,\overline{x}\right)}{y} \text{per } y \geq y^*$$

  il costo marginale è superiore al costo medio alla destra di y^*.
- Il costo marginale coincide con il costo totale medio di breve periodo in y^*.
- Le stesse conclusioni valgono per la relazione tra il costo marginale e il costo variabile medio di breve periodo.

Geometria dei costi

- La curva di costo di lungo periodo è monotona crescente nell'output: più si produce e più costa produrre
  - ma il costo totale può aumentare più o meno che proporzionalmente rispetto all'output
  - la curva del costo medio può essere crescente o decrescente rispetto all'output
- I costi medi non dovrebbero mai essere crescenti perchè le imprese dovrebbero sempre essere in grado di replicare i processi produttivi.
- Nel lungo periodo tutti i costi medi dovrebbero essere costanti o decrescenti
- Se alcuni fattori sono fissi anche nel lungo periodo o se la funzione di produzione mostra elasticità di scala diverse per diversi livelli di produzione, allora la curva del costo medio potrebbe avere un andamento a U come quella di breve periodo.