Microeconomia – a.a. 2017/2018

Corso di Laurea Magistrale in Economia e Politica Economica

Nicola Campigotto · nicola.campigotto2<at>unibo.it

Esercitazione 7 – 27 novembre 2017

Esercizio 1

Sia la funzione di utilità dell'agente $i = \{A, B\}$ data da $u^i\left(x_1^i, x_2^i\right) = \left(x_1^i\right)^{\frac{1}{2}} x_2^i$ e siano le dotazioni iniziali dei due agenti, rispettivamente, $e^A = (1, 0)$ ed $e^B = (0, 1)$.

1. Si calcoli e si rappresenti graficamente la curva dei contratti di questa economia.
2. Si ricavino le funzioni di domanda walrasiana dei due beni per entrambi i consumatori.
3. Si trovino i prezzi e le allocazioni di equilibrio walrasiani.

La scatola di Edgeworth ha base e altezza unitarie, essendo $e_1^A + e_1^B = e_2^A + e_2^B = 1$. Le condizioni che permettono di ricavare la curva dei contratti sono:

$$SMS_{1,2}^A \coloneqq \frac{\frac{\partial u^A(\cdot)}{\partial x_1^A}}{\frac{\partial u^A(\cdot)}{\partial x_2^A}} = \frac{\frac{\partial u^B(\cdot)}{\partial x_1^B}}{\frac{\partial u^B(\cdot)}{\partial x_2^B}} \eqqcolon SMS_{1,2}^B,$$

$$x_1^B = 1 - x_1^A,$$

$$x_2^B = 1 - x_2^A.$$

L'eguaglianza tra i saggi marginali di sostituzione dei due agenti determina la tangenza tra le loro curve di indifferenza ed è data da:

$$\frac{\frac{1}{2}\left(x_1^A\right)^{-\frac{1}{2}} x_2^A}{\left(x_1^A\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}\left(x_1^B\right)^{-\frac{1}{2}} x_2^B}{\left(x_1^B\right)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{x_2^A}{2x_1^A} = \frac{x_2^B}{2x_1^B},$$

da cui, posti $x_1^B = 1 - x_1^A$ e $x_2^B = 1 - x_2^A$ si trova:

$$\frac{x_2^A}{x_1^A} = \frac{1 - x_2^A}{1 - x_1^A} \Rightarrow x_2^A - x_1^A x_2^A = x_1^A - x_1^A x_2^A.$$

La curva dei contratti ha quindi equazione:

$$x_2^A = x_1^A$$

e taglia a metà la scatola di Edgeworth.

La ricchezza dell'agente A è pari al valore di mercato della propria dotazione iniziale:

$$p_1 e_1^A + p_2 e_2^A = p_1 \times 1 + p_2 \times 0 = p_1$$

e il suo problema di ottimo è dunque:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x_1^A, x_2^A} & u^A\left(x_1^A, x_2^A\right) = \left(x_1^A\right)^{\frac{1}{2}} x_2^A \\ \text{s.v.} & p_1 x_1^A + p_2 x_2^A = p_1, \end{array}$$

cui corrispondono la lagrangiana $\mathcal{L}^A\left(x_1^A, x_2^A, \lambda\right) = \left(x_1^A\right)^{\frac{1}{2}} x_2^A - \lambda\left(p_1 x_1^A + p_2 x_2^A - p_1\right)$ e il sistema delle condizione del prim'ordine:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^A(\cdot)}{\partial x_1^A} = \frac{1}{2}\left(x_1^A\right)^{-\frac{1}{2}} x_2 - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^A(\cdot)}{\partial x_2^A} = \left(x_1^A\right)^{\frac{1}{2}} - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^A(\cdot)}{\partial \lambda} = p_1 x_1^A + p_2 x_2^A - p_1 = 0.$$

Dividendo la prima equazione per la seconda si trova:

$$\frac{\frac{1}{2}\left(x_1^A\right)^{-\frac{1}{2}} x_2^A}{\left(x_1^A\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x_2^A}{2x_1^A} = \frac{p_1}{p_2},$$

da cui:

$$x_2^A = \frac{2p_1}{p_2} x_1^A.$$

Sostituendo nel vincolo si ha:

$$p_1 x_1^A + p_2\left(\frac{2p_1}{p_2} x_1^A\right) = p_1 \Rightarrow 3p_1 x_1^A = p_1,$$

e la domanda walrasiana relativa al bene 1 è dunque:

$$x_1^A(\mathbf{p}) = \frac{1}{3},$$

mentre la domanda relativa al bene 2 è:

$$x_2^A(\mathbf{p}) = \frac{1}{3}\left(\frac{2p_1}{p_2}\right) = \frac{2p_1}{3p_2}.$$

Ragionando in modo analogo per l'agente B si ottiene la ricchezza:

$$p_1 e_1^B + p_2 e_2^B = p_1 \times 0 + p_2 \times 1 = p_2,$$

e, dalle condizioni del prim'ordine:

$$x_2^B = \frac{2p_1}{p_2} x_1^B.$$

Sostituendo nel vincolo si trova:

$$p_1 x_1^B + p_2\left(\frac{2p_1}{p_2} x_1^B\right) = p_2 \Rightarrow 3p_1 x_1^B = p_2,$$

e la domanda walrasiana relativa al bene 1 è perciò:

$$x_1^B(\mathbf{p}) = \frac{p_2}{3p_1},$$

mentre la domanda relativa al bene 1 è:

$$x_2^B = \left(\frac{2p_1}{p_2}\right)\frac{p_2}{3p_1} = \frac{2}{3}.$$

I prezzi relativi di equilibrio possono essere ricavati considerando il mercato del bene 1 e imponendo che l'eccesso di domanda del bene sia nullo:

$$x_1^A(\mathbf{p}) + x_1^B(\mathbf{p}) = e_1^A + e_1^B,$$

ossia, sostituendo:

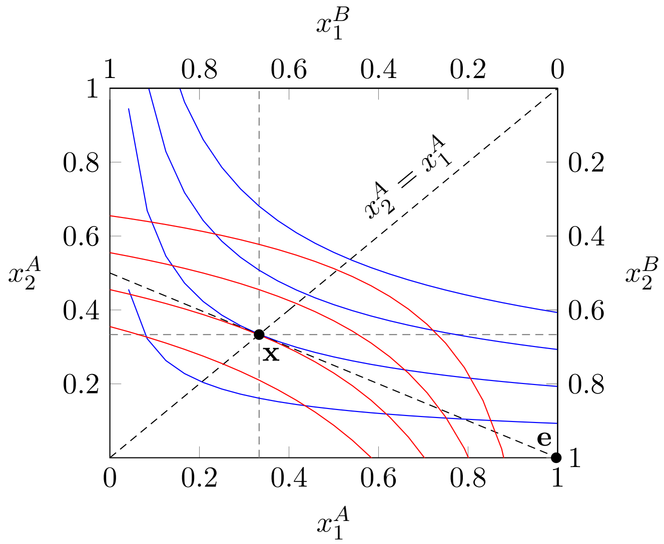
$$\frac{1}{3} + \frac{p_2}{3p_1} = 1 \Rightarrow \frac{p_2}{3p_1} = \frac{2}{3},$$

e dunque:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2}.$$

Sostituendo i prezzi walrasiani nelle funzioni di domanda, infine, si ricavano le allocazioni di equilibrio:

$$x_1^A = \frac{1}{3},$$
$$x_2^A = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3},$$
$$x_1^B = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3},$$
$$x_2^B = \frac{2}{3}.$$



Esercizio 2

Si consideri un'economia di puro scambio con due agenti, $i = \{1, 2\}$, e due beni, x e y. Ciascun consumatore ha una funzione di utilità data da $u_i(x_i, y_i) = \left(x_i^{\frac{1}{2}} + y_i^{\frac{1}{2}}\right)^2$ e dotazione iniziale $e_i = (2, 2)$

1. Si calcoli e si rappresenti graficamente l'insieme delle allocazioni Pareto-efficienti di questa economia.

2. Denotando con p_x e p_y i prezzi dei due beni, si ricavino le funzioni di domanda dei due beni per entrambi i consumatori.

3. Considerando $p_y = 1$, si calcoli l'equilibrio walrasiano. Quali sono le quantità scambiate dai due agenti?

La scatola di Edgeworth ha base e altezza pari a 4:

$$e_x^1 + e_x^2 = e_y^1 + e_y^2 = 2 + 2 = 4$$

e le condizioni che permettono di ricavare la curva dei contratti sono:

$$SMS_{x,y}^1 = SMS_{x,y}^2, \qquad x_1 = 4 - x_2, \qquad y_1 = 4 - y_2.$$

Eguagliando i saggi marginali di sostituzione dei due agenti si trova:

$$\frac{\left(x_1^{\frac{1}{2}} + y_1^{\frac{1}{2}}\right) x_1^{-\frac{1}{2}}}{\left(x_1^{\frac{1}{2}} + y_1^{\frac{1}{2}}\right) y_1^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\left(x_2^{\frac{1}{2}} + y_2^{\frac{1}{2}}\right) x_2^{-\frac{1}{2}}}{\left(x_2^{\frac{1}{2}} + y_2^{\frac{1}{2}}\right) y_2^{-\frac{1}{2}}} \Rightarrow \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{y_2}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

da cui, posti $x_2 = 4 - x_1$ e $y_2 = 4 - y_1$:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{4 - y_1}{4 - x_1} \Rightarrow 4y_1 - x_1 y_1 = 4x_1 - x_1 y_1$$

La curva dei contratti ha quindi equazione:

$$y_1 = x_1$$

e taglia a metà la scatola di Edgeworth.

La ricchezza dell'agente 1 è :

$$p_x e_x^1 + p_y e_y^1 = 2p_x + 2p_y$$

e il suo problema di ottimo è dunque:

$$\begin{aligned} \max_{x_1, y_1} \quad & u_1(x_1, y_1) = \left(x_1^{\frac{1}{2}} + y_1^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\ \text{s.v.} \quad & p_x x_1 + p_x y_1 = 2p_x + 2p_y, \end{aligned}$$

cui corrispondono la lagrangiana $\mathcal{L}_1(x_1, y_1, \lambda) = \left(x_1^{\frac{1}{2}} + y_1^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \lambda(p_x x_1 + p_x y_1 - 2p_x - 2p_y)$ e le condizioni del prim'ordine:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_1(\cdot)}{\partial x_1} &= \left(x_1^{\frac{1}{2}} + y_1^{\frac{1}{2}}\right) x_1^{-\frac{1}{2}} - \lambda p_x = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}_1(\cdot)}{\partial y_1} &= \left(x_1^{\frac{1}{2}} + y_1^{\frac{1}{2}}\right) y_1^{-\frac{1}{2}} - \lambda p_y = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}_1(\cdot)}{\partial \lambda} &= p_x x_1 + p_x y_1 - 2p_x + 2p_y = 0. \end{aligned}$$

Dividendo la prima equazione per la seconda si trova:

$$\frac{y_1^{\frac{1}{2}}}{x_1^{\frac{1}{2}}} = \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow y_1 = \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2 x_1,$$

e sostituendo nel vincolo:

$$p_x x_1 + p_y \left[\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2 x_1\right] = 2p_x + 2p_y,$$

da cui:

$$p_x x_1 \left(1+\frac{p_x}{p_y}\right) = 2\left(p_x+p_y\right) \Rightarrow p_x x_1 \left(\frac{p_y+p_x}{p_y}\right) = 2\left(p_x+p_y\right)$$
$$\Rightarrow p_x x_1 = 2p_y.$$

La domanda walrasiana relativa al bene x è dunque:

$$x_1\left(\mathbf{p}\right) = \frac{2p_y}{p_x},$$

mentre la domanda relativa al bene y è:

$$y_1\left(\mathbf{p}\right) = \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2 x_1\left(\mathbf{p}\right) = \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2 \frac{2p_y}{p_x} = \frac{2p_x}{p_y}.$$

La ricchezza dell'agente 2 è $p_x e_x^2 + p_y e_y^2 = 2p_x + 2p_y$. Per analogia con l'agente 1 si ha quindi:

$$x_2\left(\mathbf{p}\right) = \frac{2p_y}{p_x}, \qquad y_2\left(\mathbf{p}\right) = \frac{2p_x}{p_y}.$$

I prezzi di equilibrio sono ottenuti considerando il mercato del bene x e imponendo che l'eccesso di domanda del bene sia zero:

$$x_1\left(\mathbf{p}\right) + x_2\left(\mathbf{p}\right) = e_x^1 + e_x^2,$$

ossia $\frac{4p_y}{p_x} = 4$, da cui si trova:

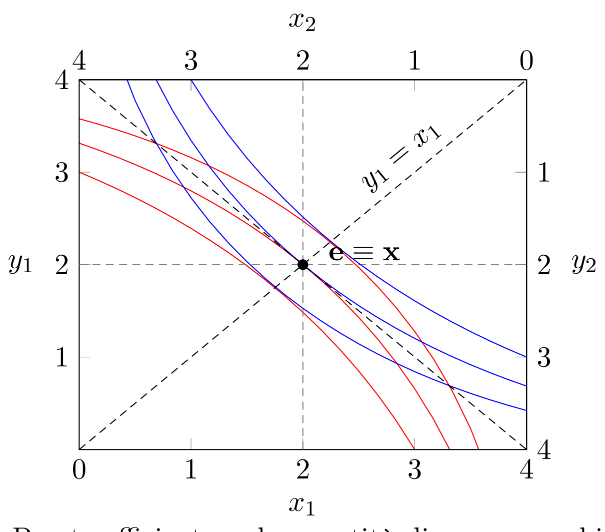
$$\frac{p_x}{p_y} = 1$$

e prendendo il prezzo del bene y come numerario (ossia ponendo $p_y = 1$):

$$p_x = 1.$$

Sostituendo i prezzi walrasiani nelle funzioni di domanda, infine, si ricavano le allocazioni di equilibrio:

$$x_1 = 2,$$
$$y_1 = 2,$$
$$x_2 = 2,$$
$$y_2 = 2.$$



L'allocazione iniziale è dunque Pareto-efficiente, e le quantità di x e y scambiate dai due agenti sono pari a zero.

Esercizio 3

Si consideri un'economia di puro scambio con due agenti. Il consumatore A è caratterizzato dalla funzione di utilità $u^A\left(x_1^A, x_2^A\right) = \left(x_1^A\right)^2\left(x_2^A\right)^2$ e dalla dotazione iniziale $e^A = (18, 4)$, mentre il consumatore B ha funzione di utilità $u^B\left(x_1^B, x_2^B\right) = \log x_1^B + 2\log x_2^B$ e dotazione iniziale $e^B = (3, 6)$.

1. Caratterizzare analiticamente l'insieme delle allocazioni Pareto-efficienti. Si fornisca una rappresentazione grafica.

2. Trovare i prezzi e le allocazioni di equilibrio walrasiani.

La scatola di Edgeworth ha base 21 e altezza 10:

$$e_1^A + e_1^B = 18 + 2 = 21; \qquad e_2^A + e_2^B = 4 + 6 = 10$$

e le condizioni che permettono di ricavare la curva dei contratti sono dunque:

$$SMS_{1,2}^A = SMS_{1,2}^B, \qquad x_1^A = 21 - x_1^B, \qquad x_2^A = 10 - x_2^B.$$

Applicando una trasformazione logaritmica alla funzione di utilità del consumatore A si ottiene $u^A\left(x_1^A, x_2^A\right) = 2\log x_1^A + 2\log x_2^A$. Eguagliando i saggi marginali di sostituzione dei due agenti si ha quindi:

$$\frac{\frac{2}{x_1^A}}{\frac{2}{x_2^A}} = \frac{\frac{1}{x_1^B}}{\frac{2}{x_2^B}} \Rightarrow \frac{x_2^A}{x_1^A} = \frac{x_2^B}{2x_1^B}$$

e sostituendo $x_1^B = 21 - x_1^A$ e $x_2^B = 10 - x_2^A$:

$$\begin{aligned} \frac{2x_2^A}{x_1^A} = \frac{10 - x_2^A}{21 - x_1^A} &\Rightarrow 42x_2^A - 2x_1^A x_2^A = 10x_1^A - x_1^A x_2^A \\ &\Rightarrow x_2^A\left(42 - x_1^A\right) = 10x_1^A. \end{aligned}$$

La curva dei contratti ha quindi equazione:

$$x_2^A = \frac{10x_1^A}{42 - x_1^A}.$$

La ricchezza dell'agente A è:

$$p_1 e_1^A + p_2 e_2^A = 18p_1 + 4p_2$$

e il suo problema di ottimo è dunque:

$$\begin{aligned} \max_{x_1^A, x_2^A} \quad & u^A\left(x_1^A, x_2^A\right) = 2\log x_1^A + 2\log x_2^A \\ \text{s.v.} \quad & p_1 x_1^A + p_2 x_2^A = 18p_1 + 4p_2, \end{aligned}$$

cui corrispondono la lagrangiana $\mathcal{L}^A(\cdot) = 2\log x_1^A + 2\log x_2^A - \lambda\left(p_1 x_1^A + p_2 x_2^A - 18p_1 - 4p_2\right)$ e il sistema delle condizioni del prim'ordine:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^A(\cdot)}{\partial x_1^A} = \frac{2}{x_1^A} - \lambda p_1 = 0; \qquad \frac{\partial \mathcal{L}^A(\cdot)}{\partial x_2^A} = \frac{2}{x_2^A} - \lambda p_2 = 0;$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^A(\cdot)}{\partial \lambda} = p_1 x_1^A + p_2 x_2^A - 18p_1 - 4p_2 = 0.$$

Dividendo la prima equazione per la seconda si ottiene:

$$\frac{\frac{2}{x_1^A}}{\frac{2}{x_2^A}} = \frac{x_2^A}{x_1^A} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow x_2^A = \frac{p_1}{p_2} x_1^A$$

e sostituendo nel vincolo:

$$p_1 x_1^A + p_2 \left(\frac{p_1}{p_2} x_1^A \right) = 18p_1 + 4p_2 \Rightarrow p_1 x_1^A = 9p_1 + 2p_2.$$

La domanda walrasiana relativa al bene 1 è dunque:

$$x_1^A (\mathbf{p}) = \frac{9p_1 + 2p_2}{p_1},$$

mentre la domanda relativa al bene 2 è:

$$x_2^A (\mathbf{p}) = \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{9p_1 + 2p_2}{p_1} \right) = \frac{9p_1 + 2p_2}{p_2}.$$

La ricchezza dell'agente B è invece:

$$p_1 e_1^B + p_2 e_2^B = 3p_1 + 6p_2$$

e il suo problema di ottimo è dunque:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x_1^B, x_2^B} & u^B \left(x_1^B, x_2^B \right) = \log x_1^B + 2 \log x_2^B \\ \text{s.v.} & p_1 x_1^B + p_2 x_2^B = 3p_1 + 6p_2, \end{array}$$

cui corrispondono la lagrangiana $\mathcal{L}^B (\cdot) = \log x_1^B + 2 \log x_2^B - \mu \left(p_1 x_1^B + p_2 x_2^B - 3p_1 + 6p_2 \right)$ e le condizioni del prim'ordine:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^B (\cdot)}{\partial x_1^B} = \frac{1}{x_1^B} - \mu p_1 = 0; \qquad \frac{\partial \mathcal{L}^B (\cdot)}{\partial x_2^B} = \frac{2}{x_2^B} - \mu p_2 = 0;$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^B (\cdot)}{\partial \mu} = p_1 x_1^B + p_2 x_2^B - 3p_1 + 6p_2 = 0.$$

Dividendo la prima equazione per la seconda si ottiene:

$$\frac{\frac{1}{x_1^B}}{\frac{2}{x_2^B}} = \frac{x_2^B}{2x_1^B} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow x_2^B = \frac{2p_1}{p_2} x_1^B$$

e sostituendo nel vincolo:

$$p_1 x_1^B + p_2 \left(\frac{2p_1}{p_2} x_1^B \right) = 3p_1 + 6p_2 \Rightarrow p_1 x_1^B = p_1 + 2p_2.$$

La domanda walrasiana relativa al bene 1 è dunque:

$$x_1^B (\mathbf{p}) = \frac{p_1 + 2p_2}{p_1},$$

mentre la domanda relativa al bene 2 è:

$$x_2^B (\mathbf{p}) = \frac{2p_1}{p_2} \left(\frac{p_1 + 2p_2}{p_1} \right) = \frac{2 (p_1 + 2p_2)}{p_2}.$$

I prezzi di equilibrio sono ottenuti considerando il mercato del bene 1 e imponendo che l'eccesso di domanda del bene sia zero:

$$x_1^A(\mathbf{p}) + x_1^B(\mathbf{p}) = e_1^A + e_1^B,$$

ossia $\frac{9p_1+2p_2}{p_1} + \frac{p_1+2p_2}{p_1} = 21$, da cui si trova:

$$\frac{10p_1 + 4p_2}{p_1} = 21 \Rightarrow 11p_1 = 4p_2.$$

I prezzi relativi di equilibrio sono quindi:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{4}{11}$$

e prendendo il prezzo del bene 2 come numerario (ossia ponendo $p_2 = 1$):

$$p_1 = \frac{4}{11}.$$

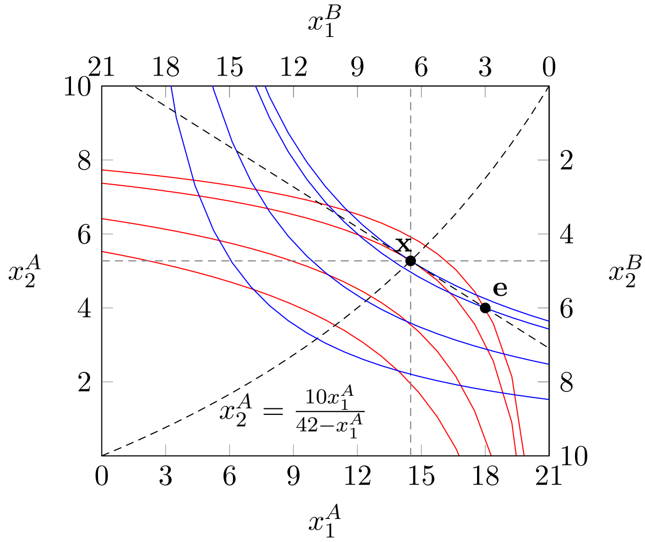
Sostituendo i prezzi walrasiani nelle funzioni di domanda, infine, si ricavano le allocazioni di equilibrio:

$$x_1^A = \frac{29}{2} = 14,5,$$

$$x_2^A = \frac{58}{11} \approx 5,28,$$

$$x_1^B = \frac{13}{2} = 6,5,$$

$$x_2^B = \frac{52}{11} \approx 4,72.$$



Esercizio 4

Si consideri un'economia di puro scambio con due beni e due agenti. Il consumatore A è caratterizzato dalla funzione di utilità $u^A(x_1^A, x_2^A) = (x_1^A)^{\frac{1}{2}}(x_2^A)^{\frac{1}{2}}$ e dalla dotazione iniziale $e^A = (9,4)$, mentre il consumatore B è caratterizzato dalla funzione di utilità $u^B(x_1^B, x_2^B) = \min\{x_1^B;\ 2x_2^B\}$ e dalla dotazione iniziale $e^B = (1,4)$

1. Caratterizzare analiticamente l'insieme delle allocazioni Pareto-efficienti. Si fornisca una rappresentazione grafica.

2. Caratterizzare analiticamente l'insieme delle allocazioni che costituiscono il core dell'economia. Si fornisca una rappresentazione grafica (si può utilizzare il grafico precedente).

3. Trovare i prezzi e le allocazioni di equilibrio walrasiani.

La scatola di Edgeworth ha base 10 e altezza 8:

$$e_1^A + e_1^B = 9 + 1 = 10; \qquad e_2^A + e_2^B = 4 + 4 = 8$$

L'insieme delle allocazioni Pareto-efficienti coincide con il raggio su cui giacciono i punti angolosi delle curve di indifferenza dell'agente B e ha quindi equazione:

$$x_1^B = 2x_2^B \Rightarrow x_2^B = \frac{x_1^B}{2}.$$

Considerando le condizioni di realizzabilità delle allocazioni, $x_1^B = 10 - x_1^A$ e $x_2^B = 8 - x_2^A$, l'equazione relativa alla curva dei contratti può essere riscritta in termini di beni consumati dall'agente A:

$$\begin{aligned} 8 - x_2^A = \frac{10 - x_1^A}{2} &\Rightarrow 16 - 2x_2^A = 10 - x_1^A \\ &\Rightarrow x_2^A = 3 + \frac{x_1^A}{2}. \end{aligned}$$

Il *core* è costituito da quella porzione della curva dei contratti che è compresa tra le curve di indifferenza dei due agenti passanti per il punto corrispondente alla dotazione iniziale. L'utilità che A e B traggono dalla dotazione iniziale è:

$$u^A(9,4) = \sqrt{9} \times \sqrt{4} = 6, \qquad u^B(1,4) = \min\{1;\ 2 \times 4\} = \min\{1;\ 8\} = 1$$

e il *core* è quindi caratterizzato dalle seguenti condizioni:

$$\begin{cases} x_2^A = 3 + \dfrac{x_1^A}{2} \\ u^A\left(x_1^A, x_2^A\right) \geq 6 \\ u^B\left(x_1^B, x_2^B\right) \geq 1. \end{cases}$$

Occorre a questo punto trovare i punti di intersezione tra le curve di indifferenza dei due agenti e la curva dei contratti. La curva di livello 6 dell'agente A, passante per e^A, ha equazione:

$$\left(x_1^A\right)^{\frac{1}{2}} \left(x_2^A\right)^{\frac{1}{2}} = 6 \Rightarrow x_2^A = \frac{36}{x_1^A}.$$

e il punto di intersezione con la curva dei contratti è individuato risolvendo il sistema:

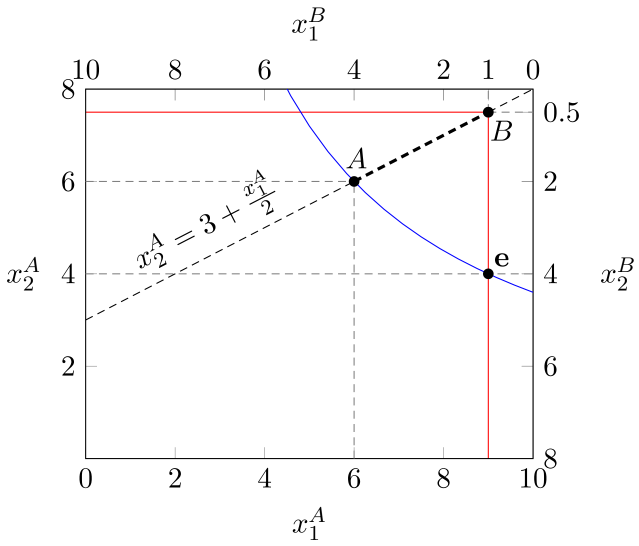
$$\begin{cases} x_2^A = 3 + \dfrac{x_1^A}{2} \\ x_2^A = \dfrac{36}{x_1^A}, \end{cases}$$

da cui, sostituendo, si ricava l'equazione di secondo grado grado $\left(x_1^A\right)^2 + 6x_1^A - 72 = 0$, la cui unica soluzione ammissibile è $x_1^A = 6$. Il punto A rappresentato in figura ha quindi coordinate:

$$x_1^A(A) = 6; \qquad x_2^A(A) = 3 + \frac{x_1^A(A)}{2} = 6.$$

Per l'agente B, il punto di intersezione con la curva dei contratti corrisponde al punto angoloso della curva di indifferenza di livello 1. Il punto B ha dunque coordinate:

$$x_1^B(B) = 1; \qquad x_2^B(B) = \frac{x_1^B(B)}{2} = \frac{1}{2}.$$



La ricchezza dell'agente A è :

$$p_1 e_1^A + p_2 e_2^A = 9p_1 + 4p_2$$

e il suo problema di ottimo è dunque:

$$\max_{x_1^A, x_2^A} \quad u^A\left(x_1^A, x_2^A\right) = \frac{1}{2}\log x_1^A + \frac{1}{2}\log x_2^A$$
$$\text{s.v.} \quad p_1 x_1^A + p_2 x_2^A = 9p_1 + 4p_2,$$

cui corrispondono la lagrangiana $\mathcal{L}^A(\cdot) = \frac{1}{2}\log x_1^A + \frac{1}{2}\log x_2^A - \lambda\left(p_1 x_1^A + p_2 x_2^A - 9p_1 - 4p_2\right)$ e il sistema delle condizioni del prim'ordine:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^A(\cdot)}{\partial x_1^A} = \frac{1}{2x_1^A} - \lambda p_1 = 0; \qquad \frac{\partial \mathcal{L}^A(\cdot)}{\partial x_2^A} = \frac{1}{2x_2^A} - \lambda p_2 = 0;$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^A(\cdot)}{\partial \lambda} = p_1 x_1^A + p_2 x_2^A - 9p_1 - 4p_2 = 0.$$

Dividendo la prima equazione per la seconda si ottiene:

$$\frac{\frac{1}{2x_1^A}}{\frac{1}{2x_2^A}} = \frac{x_2^A}{x_1^A} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow x_2^A = \frac{p_1}{p_2}x_1^A$$

e sostituendo nel vincolo:

$$p_1 x_1^A + p_2\left(\frac{p_1}{p_2}x_1^A\right) = 9p_1 + 4p_2 \Rightarrow 2p_1 x_1^A = 9p_1 + 4p_2.$$

La domanda walrasiana relativa al bene 1 è dunque:

$$x_1^A(\mathbf{p}) = \frac{9p_1 + 4p_2}{2p_1} = \frac{9}{2} + \frac{2p_2}{p_1},$$

mentre la domanda relativa al bene 2 è:

$$x_2^A(\mathbf{p}) = \frac{p_1}{p_2}\left(\frac{9p_1 + 4p_2}{2p_1}\right) = \frac{9p_1 + 4p_2}{2p_2} = 2 + \frac{9p_1}{2p_2}.$$

La ricchezza dell'agente B è invece:

$$p_1 e_1^B + p_2 e_2^B = p_1 + 4p_2$$

e le funzioni di domanda walrasiana si trovano risolvendo il problema:

$$\begin{aligned} \max_{x_1^B, x_2^B} \quad & u^B\left(x_1^B, x_2^B\right) = \min\left\{x_1^B;\ 2x_2^B\right\} \\ \text{s.v.} \quad & p_1 x_1^B + p_2 x_2^B = p_1 + 4p_2. \end{aligned}$$

In questo caso occorre risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x_1^B = 2x_2^B \\ p_1 x_1^B + p_2 x_2^B = p_1 + 4p_2, \end{cases}$$

da cui, sostituendo, si trova $p_1\left(2x_2^B\right) + p_2 x_2^B = p_1 + 4p_2$. Le marshalliane sono quindi:

$$x_2^B(\mathbf{p}) = \frac{p_1 + 4p_2}{2p_1 + p_2}; \qquad x_1^B(\mathbf{p}) = 2x_2^B(\mathbf{p}) = \frac{2\left(p_1 + 4p_2\right)}{2p_1 + p_2}.$$

Per trovare i prezzi di equilibrio, si considera il mercato del bene 2 e si impone che l'eccesso di domanda del bene sia nullo:

$$x_2^A(\mathbf{p}) + x_2^B(\mathbf{p}) = e_2^A + e_2^B,$$

ossia $\frac{9p_1+4p_2}{2p_2} + \frac{p_1+4p_2}{2p_1+p_2} = 8$. Prendendo il prezzo del bene 2 come numerario (ossia ponendo $p_2 = 1$), l'equazione si può riscrivere come:

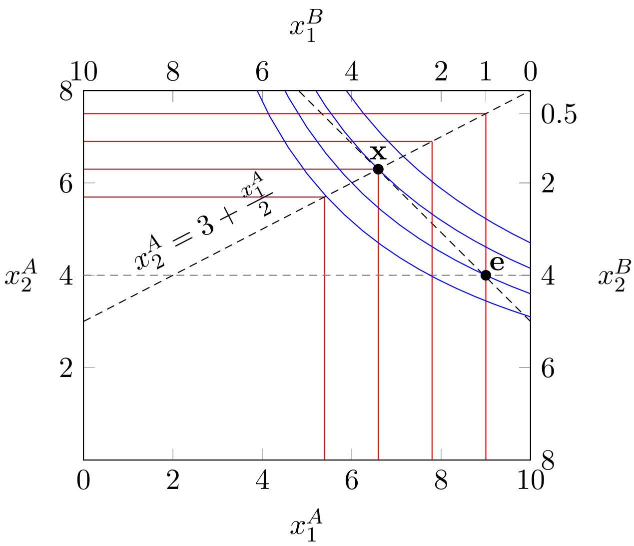
$$\begin{aligned} \frac{9p_1+4}{2} + \frac{p_1+4}{2p_1+1} = 8 &\Rightarrow \frac{\left(2p_1+1\right)\left(9p_1+4\right) + 2\left(p_1+4\right)}{2\left(2p_1+1\right)} = 8 \\ &\Rightarrow 18p_1^2 + 19p_1 + 12 = 32p_1 + 16 \\ &\Rightarrow 18p_1^2 - 13p_1 - 4 = 0, \end{aligned}$$

da cui:

$$p_1 = \frac{13 + \sqrt{457}}{36} \approx 0.955.$$

Sostituendo i prezzi di equilibrio nelle funzioni di domanda si trovano infine le allocazioni di equilibrio walrasiano:

$$\begin{aligned} x_1^A &= \frac{9}{2} + \frac{2}{0,955} \approx 6,594 \\ x_2^A &= 2 + \frac{9 \times 0,955}{2} \approx 6,297, \\ x_1^B &= \frac{2 \times 0,955 + 8}{2 \times 0,955 + 1} \approx 3,406, \\ x_2^B &= \frac{0,955 + 4}{2 \times 0,955 + 1} \approx 1,703. \end{aligned}$$



Esercizio 5

Si consideri un'economia di puro scambio con due agenti, $i = \{1, 2\}$, e due beni, x e y. Il consumatore 1 ha funzione di utilità data da $u_1(x_1, y_1) = x_1 + 2\sqrt{y_1}$, mentre il consumatore 2 è caratterizzato dalla funzione di utilità $u_2(x_2, y_2) = x_2 + 4\sqrt{y_2}$. La dotazione iniziale del consumatore 1 è di 6 unità del bene x e 2 unità del bene y, mentre il consumatore 2 è dotato di 4 unità del bene x e 8 unità del bene y.

1. Qual è la curva dei contratti in questa economia? Quali caratteristiche ha?
2. Denotando con p_x e p_y i prezzi dei due beni, si ricavino le funzioni di domanda dei due beni per entrambi i consumatori.
3. Si calcoli l'equilibrio walrasiano risolvendo per i prezzi relativi p_x/p_y e considerando la condizione di *market-clearing* per il mercato del bene y. Quali sono le quantità scambiate dai due agenti?

La scatola di Edgeworth ha base 10 e altezza 10:

$$e_x^1 + e_x^2 = 6 + 4 = 10; \qquad e_y^1 + e_y^2 = 2 + 8 = 10$$

e le condizioni che permettono di ricavare la curva dei contratti sono dunque:

$$SMS_{x,y}^1 = SMS_{x,y}^2, \qquad x_2 = 10 - x_1, \qquad y_2 = 10 - y_1.$$

Eguagliando i saggi marginali di sostituzione dei due agenti si trova:

$$\frac{1}{y_1^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2y_2^{-\frac{1}{2}}} \Rightarrow \sqrt{y_1} = \frac{\sqrt{y_2}}{2},$$

da cui, posto $y_2 = 10 - y_1$:

$$\sqrt{y_1} = \frac{\sqrt{10 - y_1}}{2} \Rightarrow 4y_1 = 10 - y_1.$$

La curva dei contratti ha quindi equazione:

$$y_1 = \frac{10}{2} = 5$$

e corrisponde a una retta orizzontale. Il bene y non sarà perciò oggetto di scambio e, in equilibrio, rimarrà pari alla dotazione iniziale.

La ricchezza dell'agente 1 è :

$$p_x e_x^1 + p_y e_y^1 = 6p_x + 2p_y$$

e il suo problema di ottimo è dunque:

$$\begin{aligned} \max_{x_1, y_1} \quad & u_1(x_1, y_1) = x_1 + 2\sqrt{y_1} \\ \text{s.v.} \quad & p_x x_1 + p_x y_1 = 6p_x + 2p_y, \end{aligned}$$

cui corrispondono la lagrangiana $\mathcal{L}^1(x_1, y_1, \lambda) = x_1 + 2\sqrt{y_1} - \lambda(p_x x_1 + p_x y_1 - 6p_x - 2p_y)$ e il sistema delle condizione del prim'ordine:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^1(\cdot)}{\partial x_1} = 1 - \lambda p_x = 0; \qquad \frac{\partial \mathcal{L}^1(\cdot)}{\partial y_1} = \frac{1}{\sqrt{y_1}} - \lambda p_y = 0;$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^1(\cdot)}{\partial \lambda} = p_x x_1 + p_x y_1 - 6p_x - 2p_y = 0.$$

Dividendo la prima equazione per la seconda si trova:

$$\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{y_1}}} = \sqrt{y_1} = \frac{p_x}{p_y}$$

e la domanda relativa al bene y è quindi:

$$y_1(\mathbf{p}) = \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2.$$

Sostituendo nel vincolo si ha:

$$p_x x_1 + p_y \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2 = 6p_x + 2p_y \Rightarrow p_x x_1 = 6p_x + 2p_y - \frac{p_x^2}{p_y}.$$

e la domanda walrasiana relativa al bene x è perciò:

$$x_1(\mathbf{p}) = \frac{6p_x + 2p_y}{p_x} - \frac{p_x}{p_y} = \frac{6p_x p_y + 2p_y^2 - p_x^2}{p_x p_y}.$$

La ricchezza dell'agente 2 è invece:

$$p_x e_x^2 + p_y e_y^2 = 4p_x + 8p_y$$

e il suo problema di ottimo è dunque:

$$\begin{aligned} \max_{x_2, y_2} \quad & u_2(x_2, y_2) = x_2 + 4\sqrt{y_2} \\ \text{s.v.} \quad & p_x x_2 + p_x y_2 = 4p_x + 8p_y, \end{aligned}$$

cui corrispondono la lagrangiana $\mathcal{L}^2(x_2, y_2, \mu) = x_2 + 4\sqrt{y_2} - \mu(p_x x_2 + p_x y_2 - 4p_x - 8p_y)$ e il sistema delle condizione del prim'ordine:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^2(\cdot)}{\partial x_1} = 1 - \mu p_x = 0; \qquad \frac{\partial \mathcal{L}^2(\cdot)}{\partial y_1} = \frac{2}{\sqrt{y_2}} - \mu p_y = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^2(\cdot)}{\partial \mu} = p_x x_1 + p_x y_1 - 4p_x - 8p_y = 0.$$

Dividendo la prima equazione per la seconda si trova:

$$\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{y_2}}} = \frac{\sqrt{y_2}}{2} = \frac{p_x}{p_y}$$

e la domanda relativa al bene y è quindi:

$$y_2(\mathbf{p}) = \left(\frac{2p_x}{p_y}\right)^2.$$

Sostituendo nel vincolo si ha:

$$p_x x_2 + p_y \left(\frac{2p_x}{p_y}\right)^2 = 4p_x + 8p_y \Rightarrow p_x x_1 = 4p_x + 8p_y - \frac{4p_x^2}{p_y}$$

e la domanda walrasiana relativa al bene x è perciò:

$$x_2(\mathbf{p}) = \frac{4p_x + 8p_y}{p_x} - \frac{4p_x^2}{p_x p_y} = \frac{4p_x p_y + 8p_y^2 - 4p_x^2}{p_x p_y}.$$

I prezzi relativi di equilibrio possono essere ricavati considerando il mercato del bene 2 e imponendo che l'eccesso di domanda del bene sia zero:

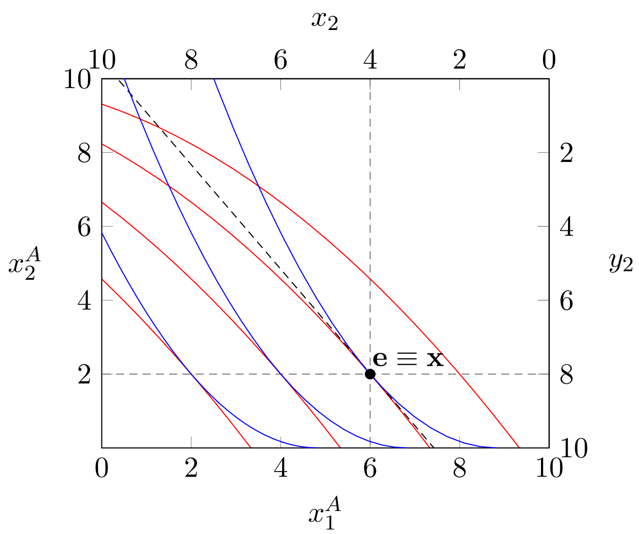
$$y_1(\mathbf{p}) + y_2(\mathbf{p}) = e_y^1 + e_y^2,$$

ossia $\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2 + \left(\frac{2p_x}{p_y}\right)^2 = 10$, da cui si trova:

$$\frac{p_x}{p_y} = \sqrt{2}.$$

Prendendo p_y come numerario e sostituendo i prezzi nelle funzioni di domanda, infine, si ricavano le allocazioni di equilibrio:

$$x_1 = 6,$$
$$y_1 = 2,$$
$$x_2 = 4,$$
$$y_2 = 8.$$



L'allocazione iniziale è dunque Pareto-efficiente, e le quantità di x e y scambiate dai due agenti sono pari a zero.

Esercizio 6

Si consideri un'economia di puro scambio con due beni e due agenti. Il consumatore A è caratterizzato dalla funzione di utilità $u^A\left(x_1^A, x_2^A\right) = \min\left\{x_1^A;\ x_2^A\right\}$ e dalla dotazione iniziale $e^A = (5, 0)$, mentre il consumatore B è caratterizzato dalla funzione di utilità $u^B\left(x_1^B, x_2^B\right) = \min\left\{x_1^B;\ \left(x_2^B\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$ e dalla dotazione iniziale $e^B = (0, 20)$.

1. Caratterizzare analiticamente le curve prezzo-consumo dei due agenti.

2. Trovare l'allocazione di equilibrio walrasiano come punto di intersezione delle curve prezzo-consumo.

3. Trovare i prezzi relativi di equilibrio walrasiano come pendenza della retta passante per la dotazione iniziale e l'allocazione di equilibrio (suggerimento: si consideri il punto di vista dell'agente A).

4. Si ripeta l'esercizio considerando una diversa dotazione iniziale dell'agente A, pari a $e'^A = (30, 0)$

La scatola di Edgeworth ha base 5 e altezza 20:

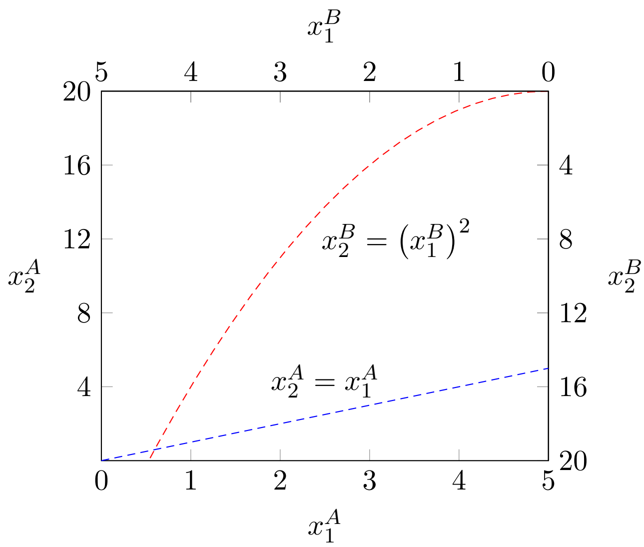
$$e_1^A + e_1^B = 5 + 0 = 5; \qquad e_2^A + e_2^B = 0 + 20 = 20.$$

La curva prezzo-consumo di ciascun agente corrisponde al luogo geometrico delle proprie scelte di consumo ottimali a fronte di variazioni del prezzo di un bene. Poiché entrambe le funzioni di utilità corrispondono a preferenze per beni perfetti complementi, l'allocazione ottimale di ciascun agente è individuata sempre in corrispondenza del luogo geometrico su cui giacciono i punti angolosi delle proprie curve di indifferenza:

$$x_2^A = x_1^A, \qquad x_2^B = \left(x_1^B\right)^2.$$

Ponendo $x_2^B = 20 - x_2^A$ e $x_1^B = 5 - x_1^A$, la seconda equazione può essere riscritta come:

$$20 - x_2^A = \left(5 - x_1^A\right)^2 \Rightarrow x_2^A = -\left(x_1^A\right)^2 + 10x_1^A - 5.$$



L'equilibrio walrasiano può essere ricavato intersecando le due curve prezzo consumo:

$$\begin{cases} x_2^A = x_1^A \\ x_2^A = -\left(x_1^A\right)^2 + 10x_1^A - 5, \end{cases}$$

da cui, sostituendo $x_2^A = x_1^A$ nella seconda equazione, si trova:

$$\left(x_1^A\right)^2 - 9x_1^A + 5 = 0,$$

la cui unica soluzione ammissibile è:

$$x_1^A = \frac{9 - \sqrt{61}}{2} \approx 0,59.$$

Segue che:

$$x_2^A = x_1^A = \frac{9 - \sqrt{61}}{2} \approx 0,59$$

e l'allocazione di equilibrio relativa all'agente B è dunque data da:

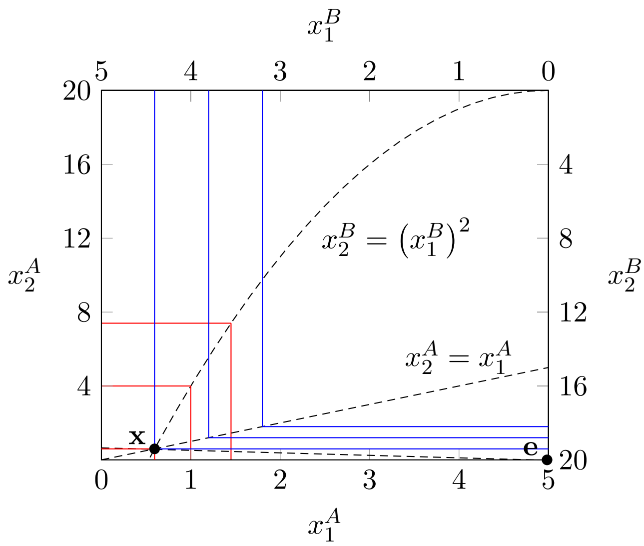
$$x_1^B = 5 - x_1^A = 5 - \frac{9-\sqrt{61}}{2} = \frac{1+\sqrt{61}}{2} \approx 4,41; \qquad x_2^B = 20 - x_2^A = 20 - \frac{9-\sqrt{61}}{2} = \frac{31+\sqrt{61}}{2} \approx 19,41.$$

La retta passante per i punti $(5,0)$ e $\left(\frac{9-\sqrt{61}}{2}, \frac{9-\sqrt{61}}{2}\right)$ ha equazione:

$$\begin{aligned}
\frac{x_2^A - 0}{\frac{9-\sqrt{61}}{2} - 0} = \frac{x_1^A - 5}{\frac{9-\sqrt{61}}{2} - 5} &\Rightarrow x_2^A \left(\frac{9-\sqrt{61}}{2} - 5\right) = \left(x_1^A - 5\right)\left(\frac{9-\sqrt{61}}{2}\right) \\
&\Rightarrow x_2^A \left(\frac{9-\sqrt{61}-10}{2}\right) = \left(x_1^A - 5\right)\left(\frac{9-\sqrt{61}}{2}\right) \\
&\Rightarrow x_2^A \left(-1-\sqrt{61}\right) = \left(x_1^A - 5\right)\left(9-\sqrt{61}\right) \\
&\Rightarrow x_2^A = -\frac{9-\sqrt{61}}{1+\sqrt{61}} x_1^A + \frac{5\left(9-\sqrt{61}\right)}{1+\sqrt{61}}
\end{aligned}$$

e ha quindi pendenza (in valore assoluto):

$$\frac{9-\sqrt{61}}{1+\sqrt{61}} = \frac{p_1}{p_2}.$$



Nel caso in cui le dotazioni iniziali dei due agenti siano $e'^A = (30,0)$ ed $e^B = (0,20)$, infine, la dimensione della scatola di Edgeworth diventa:

$$e_1'^A + e_1^B = 30 + 0 = 30; \qquad e_2'^A + e_2^B = 0 + 20 = 20.$$

Sostituendo $x_1^A = 30 - x_1^B$ e $x_2^A = 20 - x_2^B$ nell'equazione della curva prezzo-consumo di A ($x_2^A = x_1^A$), questa può essere riscritta come:

$$20 - x_2^B = 30 - x_1^B \Rightarrow x_2^B = x_1^B - 10.$$

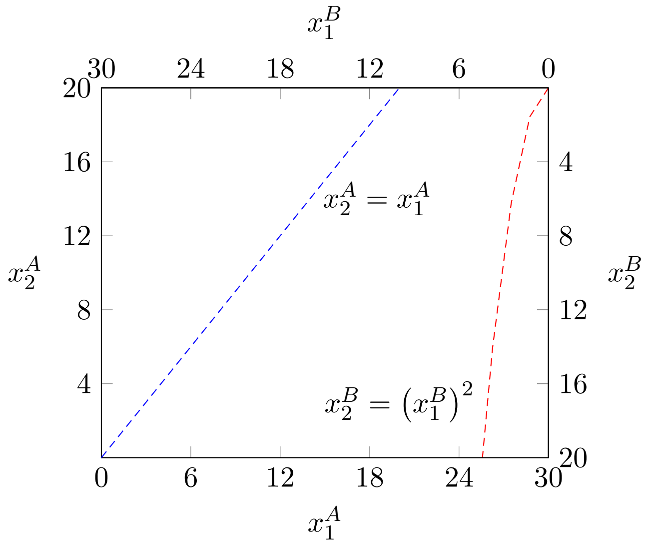
L'intersezione tra le due curve prezzo-consumo si trova quindi risolvendo:

$$\begin{cases} x_2^B = \left(x_1^B\right)^2 \\ x_2^B = x_1^B - 10, \end{cases}$$

da cui, sostituendo $x_2^B = \left(x_1^B\right)^2$ nella seconda equazione, si trova:

$$\left(x_1^B\right)^2 - x_1^B + 10 = 0,$$

che non ammette radici reali. Con queste dotazioni iniziali, dunque, le curve prezzo-consumo dei due agenti non si intersecano mai.



Esercizio 7

In un'economia con due agenti e due beni le funzioni di utilità sono:

$$u^A\left(x_1^A, x_2^A\right) = x_1^A\left(x_2^A\right)^2, \qquad u^B\left(x_1^B, x_2^B\right) = x_1^B x_2^B$$

e le dotazioni iniziali sono $(e_1, e_2) = (10, 20)$.

1. Un pianificatore sociale intende allocare i beni con il fine di massimizzare l'utilità dell'agente A tenendo l'utilità dell'agente B costante al livello $u^2 = 90$. Si ricavino le allocazioni di equilibrio che risolvono il problema del pianificatore sociale. Sono Pareto-efficienti?

2. Si supponga che il pianificatore sociale divida le dotazioni iniziali in modo che $e^A = \left(\frac{15}{2}, 0\right)$ ed $e^B = \left(\frac{5}{2}, 20\right)$. Si trovi l'equilibrio walrasiano in questa economia. Qual è la relazione tra le allocazioni di equilibrio walrasiano e le allocazioni trovate al punto 1?

La scatola di Edgeworth ha base 10 e altezza 20, e le condizioni che permettono di ricavare la curva dei contratti sono:

$$SMS_{1,2}^A = SMS_{1,2}^B, \qquad x_1^B = 10 - x_1^A, \qquad x_2^B = 20 - x_2^A.$$

Eguagliando i saggi marginali di sostituzione dei due agenti si ottiene:

$$\frac{\frac{1}{x_1^A}}{\frac{2}{x_2^A}} = \frac{\frac{1}{x_1^B}}{\frac{1}{x_2^B}} \Rightarrow \frac{x_2^A}{2x_1^A} = \frac{x_2^B}{x_1^B},$$

e sostituendo $x_1^B = 10 - x_1^A$ e $x_2^B = 20 - x_2^A$:

$$\begin{aligned} \frac{x_2^A}{2x_1^A} = \frac{20 - x_2^A}{10 - x_1^A} &\Rightarrow 10x_2^A - x_1^A x_2^A = 40x_1^A - 2x_1^A x_2^A \\ &\Rightarrow x_2^A \left(10 + x_1^A\right) = 40x_1^A. \end{aligned}$$

La curva dei contratti ha quindi equazione $x_2^A = \frac{40x_1^A}{10+x_1^A}$.

Il problema del pianificatore sociale è:

$$\begin{aligned} \max_{x_1^A, x_2^A} \quad & u^A\left(x_1^A, x_2^A\right) = x_1^A \left(x_2^A\right)^2 \\ \text{s.v.} \quad & u^B\left(x_1^B, x_2^B\right) = x_1^B x_2^B = 90 \\ & x_1^B = 10 - x_1^A \\ & x_2^B = 20 - x_1^A, \end{aligned}$$

che, sostituendo $x_1^B = 10 - x_1^A$ e $x_2^B = 20 - x_2^A$ in $u^B(\cdot)$, si può riscrivere come:

$$\begin{aligned} \max_{x_1^A, x_2^A} \quad & u^A\left(x_1^A, x_2^A\right) = x_1^A \left(x_2^A\right)^2 \\ \text{s.v.} \quad & \left(10 - x_1^A\right)\left(20 - x_2^A\right) = 90, \end{aligned}$$

cui corrisponde la lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(x_1^A, x_2^A, \lambda\right) &= x_1^A \left(x_2^A\right)^2 - \lambda\left[\left(10 - x_1^A\right)\left(20 - x_2^A\right) - 90\right] \\ &= x_1^A \left(x_2^A\right)^2 - \lambda\left(110 + x_1^A x_2^A - 20x_1^A - 10x_2^A\right). \end{aligned}$$

Le condizioni del prim'ordine sono quindi:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_1^A} = \left(x_2^A\right)^2 - \lambda x_2^A + 20\lambda = 0; \qquad \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_2^A} = 2x_1^A x_2^A - \lambda x_1^A + 10\lambda = 0;$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda} = 110 + x_1^A x_2^A - 20x_1^A - 10x_2^A = 0.$$

Dalla prima equazione si ottiene $\left(x_2^A\right)^2 = \lambda\left(x_2^A - 20\right)$, da cui:

$$\lambda = \frac{\left(x_2^A\right)^2}{x_2^A - 20}.$$

Sostituendo nella seconda equazione si trova dunque:

$$2x_1^A x_2^A - \left[\frac{\left(x_2^A\right)^2}{x_2^A - 20}\right] x_1^A + \frac{10\left(x_2^A\right)^2}{x_2^A - 20} = \frac{2x_1^A x_2^A\left(x_2^A - 20\right) - x_1^A\left(x_2^A\right)^2 + 10\left(x_2^A\right)^2}{x_2^A - 20} = 0,$$

da cui:

$$\begin{aligned} x_1^A\left(x_2^A\right)^2 + 10\left(x_2^A\right)^2 - 40x_1^A x_2^A &= x_1^A x_2^A + 10x_2^A - 40x_1^A \\ &= x_2^A\left(10 + x_1^A\right) - 40x_1^A = 0 \end{aligned}$$

e risolvendo per x_2^A:

$$x_2^A = \frac{40x_1^A}{10 + x_1^A}.$$

Sostituendo nel vincolo, infine, si ottiene:

$$\begin{aligned}
&110 + x_1^A \left(\frac{40x_1^A}{10 + x_1^A} \right) - 20x_1^A - 10 \left(\frac{40x_1^A}{10 + x_1^A} \right) \\
&= \frac{110 \left(10 + x_1^A\right) + 40 \left(x_1^A\right)^2 - 20x_1^A \left(10 + x_1^A\right) - 400x_1^A}{10 + x_1^A} = 0
\end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned}
1100 + 110x_1^A + 40 \left(x_1^A\right)^2 - 200x_1^A - 20 \left(x_1^A\right)^2 - 400x_1^A = {} & 110 + 11x_1^A + 4 \left(x_1^A\right)^2 - 20x_1^A \\
& - 2 \left(x_1^A\right)^2 - 40x_1^A \\
= {} & 2 \left(x_1^A\right)^2 - 49x_1^A + 110 = 0.
\end{aligned}$$

Le radici dell'equazione di sono $\frac{49 \pm \sqrt{2401-880}}{4} = \frac{49 \pm \sqrt{1521}}{4} = \frac{49 \pm 39}{4}$. Poiché la maggiore delle due radici corrisponde a un valore di x_1^A superiore a e_1, l'unica soluzione ammissibile è:

$$x_1^A = \frac{49 - 39}{4} = \frac{5}{2}.$$

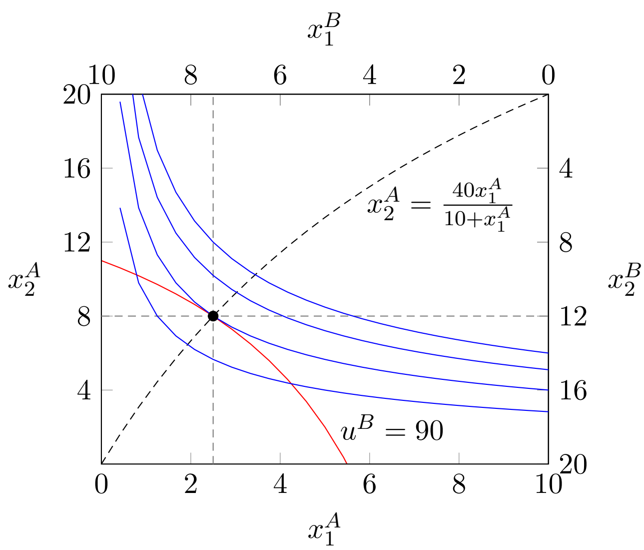
Segue che:

$$x_2^A = \frac{40 \times \frac{5}{2}}{10 + \frac{5}{2}} = \frac{100}{\frac{25}{2}} = 8.$$

L'allocazione di equilibrio relativa all'agente B è perciò data da:

$$x_1^B = 10 - x_1^A = 10 - \frac{5}{2} = \frac{15}{2}; \qquad x_2^B = 20 - x_2^A = 20 - 8 = 12.$$

Le allocazioni di equilibrio sono Pareto-efficienti, poiché appartengono alla curva dei contratti precedentemente ricavata.



Nel caso le dotazioni iniziali scelte dal pianificatore siano $e^A = \left(\frac{15}{2}, 0\right)$ ed $e^B = \left(\frac{5}{2}, 20\right)$, la ricchezza dell'agente A è:

$$p_1 e_1^A + p_2 e_2^A = \frac{15p_1}{2}$$

e, applicando una trasformazione logaritmica alla sua funzione di utilità, il suo problema di ottimo è:

$$\max_{x_1^A, x_2^A} \quad u^A\left(x_1^A, x_2^A\right) = \log x_1^A + 2\log x_2^A$$
$$\text{s.v.} \quad p_1 x_1^A + p_2 x_2^A = \frac{15p_1}{2},$$

cui corrispondono la lagrangiana $\mathcal{L}^A(\cdot) = \log x_1^A + 2\log x_2^A - \mu\left(p_1 x_1^A + p_2 x_2^A - \frac{15p_1}{2}\right)$ e il sistema delle condizioni del prim'ordine:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^A(\cdot)}{\partial x_1^A} = \frac{1}{x_1^A} - \mu p_1 = 0; \qquad \frac{\partial \mathcal{L}^A(\cdot)}{\partial x_2^A} = \frac{2}{x_2^A} - \mu p_2 = 0;$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}^A(\cdot)}{\partial \mu} = p_1 x_1^A + p_2 x_2^A - \frac{15p_1}{2} = 0.$$

Dividendo la prima equazione per la seconda si ottiene:

$$\frac{\frac{1}{x_1^A}}{\frac{2}{x_2^A}} = \frac{x_2^A}{2x_1^A} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow x_2^A = \frac{2p_1}{p_2}x_1^A$$

e sostituendo nel vincolo:

$$p_1 x_1^A + p_2\left(\frac{2p_1}{p_2}x_1^A\right) = \frac{15p_1}{2} \Rightarrow 3p_1 x_1^A = \frac{15p_1}{2}.$$

La domanda walrasiana relativa al bene 1 è dunque:

$$x_1^A(\mathbf{p}) = \frac{5}{2},$$

mentre la domanda relativa al bene 2 è:

$$x_2^A(\mathbf{p}) = \frac{2p_1}{p_2}\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5p_1}{p_2}.$$

La ricchezza dell'agente B è invece:

$$p_1 e_1^B + p_2 e_2^B = \frac{5p_1}{2} + 20p_2$$

e il suo problema di ottimo è quindi:

$$\max_{x_1^B, x_2^B} \quad u^B\left(x_1^B, x_2^B\right) = \log x_1^B + \log x_2^B$$
$$\text{s.v.} \quad p_1 x_1^B + p_2 x_2^B = \frac{5p_1}{2} + 20p_2,$$

cui corrispondono la lagrangiana $\mathcal{L}^B(\cdot) = \log x_1^B + \log x_2^B - \psi\left(p_1 x_1^B + p_2 x_2^B - \frac{5p_1}{2} - 20p_2\right)$ e le condizioni del prim'ordine:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^B(\cdot)}{\partial x_1^B} = \frac{1}{x_1^B} - \psi p_1 = 0; \qquad \frac{\partial \mathcal{L}^B(\cdot)}{\partial x_2^B} = \frac{1}{x_2^B} - \psi p_2 = 0;$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}^B(\cdot)}{\partial \psi} = p_1 x_1^B + p_2 x_2^B - \frac{5p_1}{2} - 20p_2 = 0.$$

Dividendo la prima equazione per la seconda si ottiene:

$$\frac{\frac{1}{x_1^B}}{\frac{1}{x_2^B}} = \frac{x_2^B}{x_1^B} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow x_2^B = \frac{p_1}{p_2} x_1^B,$$

e sostituendo nel vincolo:

$$p_1 x_1^B + p_2 \left(\frac{p_1}{p_2} x_1^B \right) = \frac{5p_1}{2} + 20p_2 \Rightarrow 4p_1 x_1^B = 5p_1 + 40p_2.$$

La domanda walrasiana relativa al bene 1 è dunque:

$$x_1^B(\mathbf{p}) = \frac{5p_1 + 40p_2}{4p_1} = \frac{5}{4} + \frac{10p_2}{p_1},$$

mentre la domanda relativa al bene 2 è:

$$x_2^B(\mathbf{p}) = \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{5p_1 + 40p_2}{4p_1} \right) = \frac{5p_1 + 40p_2}{4p_2} = \frac{5p_1}{4p_2} + 10.$$

I prezzi di equilibrio sono ricavati considerando il mercato del bene 1 e ponendo $x_1^A(\mathbf{p}) + x_1^B(\mathbf{p}) = e_1^A + e_1^B$:

$$\frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{10p_2}{p_1} = \frac{15}{2} + \frac{5}{2},$$

da cui si trova:

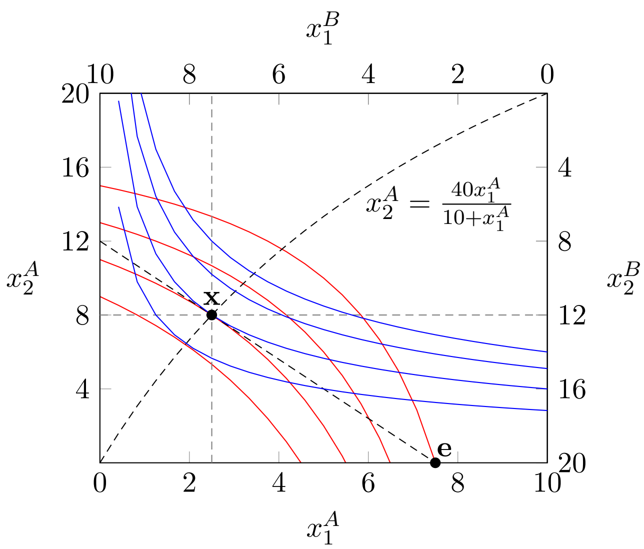
$$\frac{15}{4} + \frac{10p_2}{p_1} = 10 \Rightarrow \frac{15p_1 + 40p_2}{4p_1} = 10$$
$$\Rightarrow 15p_1 + 40p_2 = 40p_1.$$

I prezzi relativi di equilibrio sono quindi:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{40}{25} = \frac{8}{5}.$$

Sostituendo i prezzi walrasiani nelle funzioni di domanda, infine, si ricavano le allocazioni di equilibrio:

$$x_1^A = \frac{5}{2},$$
$$x_2^A = 5 \times \frac{8}{5} = 8,$$
$$x_1^B = \frac{5}{4} + 10 \times \frac{5}{8} = \frac{15}{2},$$
$$x_2^B = \frac{5}{4} \times \frac{8}{5} + 10 = 12.$$



L'allocazione di equilibrio coincide con quella scelta dal pianificatore sociale (che rappresentava dunque un equilibrio walrasiano).

Esercizio 8

Si consideri un'economia di puro scambio con due agenti, 1 e 2, e due beni, x e y. L'agente 1 ha funzione di utilità $u_1(x_1, y_1) = \min\{x_1, y_1\}$, mentre l'agente 2 ha utilità $u_2(x_2, y_2) = \min\{3x_2, y_2\}$. La dotazione iniziale dell'agente 1 è $e_1 = (4, 2)$ e la dotazione iniziale dell'agente 2 è $e_2 = (1, 7)$.

1. Si rappresenti la scatola di Edgeworth corrispondente a questa economia, specificando le dotazioni iniziali e le curve di indifferenza dei due agenti.
2. Si determini analiticamente il *core* di questa economia.
3. Si calcolino le funzioni di domanda dei due beni da parte dei due agenti, denotando con p_x e p_y i prezzi dei due beni.
4. Si trovi l'equilibrio walrasiano (prezzi e allocazioni) di questa economia. È unico?

La scatola di Edgeworth ha base 5 e altezza 9:

$$e_x^1 + e_x^2 = 4 + 1 = 5; \qquad e_y^1 + e_y^2 = 2 + 7 = 9,$$

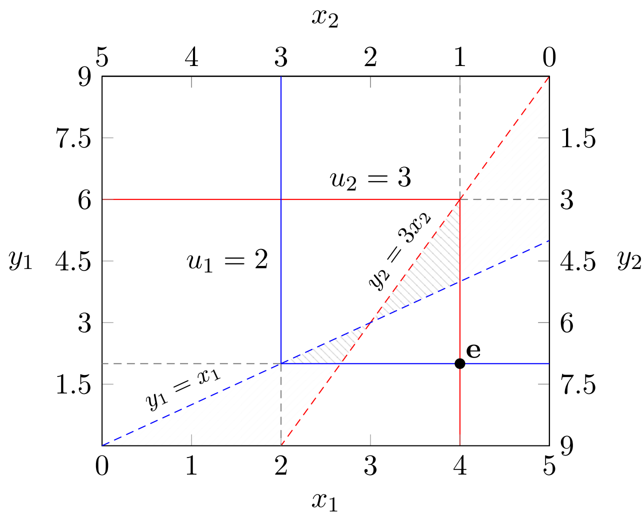
e i luoghi geometrici su cui giacciono i punti angolosi delle curve dei indifferenza dei due agenti sono:

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = 3x_1.$$

Posti $y_2 = 9 - y_1$ e $x_2 = 5 - x_1$, la seconda equazione può essere riscritta come:

$$9 - y_1 = 3(5 - x_1) \Rightarrow y_1 = -6 + 3x_1.$$

L'insieme di Pareto relativo a questa economia corrisponde all'area compresa tra le due rette, composta da due triangoli. I vertici del primo triangolo corrispondono ai punti $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(3, 3)$, i vertici del secondo ai punti $(3, 3)$, $(5, 5)$ e $(5, 9)$. Il punto di coordinate $(3, 3)$ è il punto di intersezione tra le rette $y_1 = x_1$ e $y_1 = -6 + 3x_1$.



Il *core* dell'economia è l'insieme delle allocazioni Pareto-efficienti che garantiscono ai due agenti un'utilità pari almeno a quella registrata in corrispondenza della dotazione iniziale:

$$u_1(e_x^1, e_y^1) = \min\{4, 2\} = 2, \qquad u_2(e_x^2, e_y^2) = \min\{3, 7\} = 3.$$

Il *core* è quindi caratterizzato dalle condizioni:

$$u_1(x_1, y_1) \geq 2, \qquad u_2(x_2, y_2) \geq 3$$

e corrisponde a quel sottoinsieme dell'insieme di Pareto che è delimitato dalle curve di indifferenza passanti per la dotazione iniziale. Anch'esso è composto da due triangoli: il primo ha coordinate $(2, 2)$, $(\frac{8}{3}, 2)$ e $(3, 3)$, il secondo ha coordinate $(3, 3)$, $(4, 4)$ e $(4, 6)$.

La ricchezza dell'agente 1 è:

$$p_x e_x^1 + p_y e_y^1 = 4p_x + 2p_y$$

e le funzioni di domanda walrasiana si trovano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ p_x x_1 + p_y y_1 = 4p_x + 2p_y, \end{cases}$$

da cui, sostituendo, si trova $x_1(p_x + p_y) = 4p_x + 2p_y$. Le funzioni di domanda sono quindi:

$$x_1(\mathbf{p}) = y_1(\mathbf{p}) = \frac{4p_x + 2p_y}{p_x + p_y}.$$

La ricchezza dell'agente 2 è invece:

$$p_x e_x^2 + p_y e_y^2 = p_x + 7p_y$$

e le funzioni di domanda si trovano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y_2 = 3x_2 \\ p_x x_2 + p_y y_2 = p_x + 7p_y, \end{cases}$$

da cui, sostituendo, si trova $x_2(p_x + 3p_y) = p_x + 7p_y$. Le marshalliane sono quindi:

$$x_2(\mathbf{p}) = \frac{p_x + 7p_y}{p_x + 3p_y}, \qquad y_2(\mathbf{p}) = 3\left(\frac{p_x + 7p_y}{p_x + 3p_y}\right).$$

I prezzi relativi di equilibrio possono essere ricavati considerando il mercato del bene x e imponendo che l'eccesso di domanda del bene sia zero:

$$x_1(\mathbf{p}) + x_2(\mathbf{p}) = e_x^1 + e_x^2,$$

ossia:

$$\frac{4p_x + 2p_y}{p_x + p_y} + \frac{p_x + 7p_y}{p_x + 3p_y} = 5$$

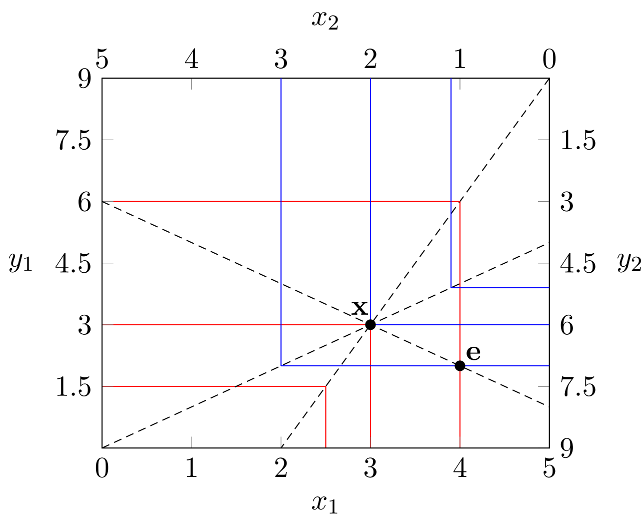
da cui, raccogliendo e semplificando, si trova:

$$\frac{p_x}{p_y} = 1.$$

Prendendo p_y come numerario e sostituendo i prezzi di equilibrio nelle funzioni di domanda, infine, si ricavano le allocazioni di equilibrio:

$$x_1 = y_1 = \frac{4 \times 1 + 2 \times 1}{1 + 1} = 3,$$

$$x_2 = \frac{1 + 7 \times 1}{1 + 3 \times 1} = 2, \qquad y_2 = 3 \times \frac{1 + 7 \times 1}{1 + 3 \times 1} = 6.$$



Esercizio 9

Si consideri un'economia di puro scambio con due beni, 1 e 2, e due agenti, A e B. L'agente A ha utilità $u^A\left(x_1^A, x_2^A\right) = \min\left\{x_1^A;\ x_2^A\right\}$ e dotazione iniziale $e^A = (30, 0)$, mentre l'agente B ha utilità indiretta $v^B\left(m, \mathbf{p}\right) = \frac{m}{2\sqrt{p_1 p_2}}$, dove m è la ricchezza dell'agente, e dotazione iniziale $e^B = (0, 20)$.

1. Si rappresenti graficamente la scatola di Edgeworth, indicando le dotazioni iniziali e le curve di indifferenza dell'agente A.
2. Si risolva il problema di massimizzazione dell'agente A e si trovino le funzioni di domanda walrasiana dei due beni.
3. Si trovino le funzioni di domanda walrasiana dell'agente B (suggerimento: sostituire per m soltanto alla fine).
4. Si trovi l'equilibrio walrasiano (prezzi e allocazioni) di questa economia.

La scatola di Edgeworth ha base $e_1^A + e_1^B = 30$ e altezza $e_2^A + e_2^B = 20$. L'agente A ha ricchezza $p_1 e_1^A + p_2 e_2^A = 30p_1$, e il luogo geometrico su cui giacciono i punti angolosi delle sue curve di indifferenza è $x_2^A = x_1^A$. Le funzioni di domanda di A si ricavano quindi risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x_1^A = x_2^A \\ p_1 x_1^A + p_2 x_2^A = 30p_1, \end{cases}$$

da cui, sostituendo, si trova $x_1^A\left(p_1 + p_2\right) = 30p_1$. Le marshalliane sono dunque:

$$x_1^A\left(\mathbf{p}\right) = x_2^A\left(\mathbf{p}\right) = \frac{30p_1}{p_1 + p_2}.$$

Le funzioni marshalliane dell'agente B possono essere calcolate utilizzando l'Identità di Roy. Dalla funzione di utilità indiretta $v^B\left(\cdot\right)$ si trovano:

$$\frac{\partial v^B\left(\cdot\right)}{\partial m^B} = \frac{1}{2\sqrt{p_1 p_2}}; \quad \frac{\partial v^B\left(\cdot\right)}{\partial p_1} = -\frac{1}{4} m p_1^{-\frac{3}{2}} p_2^{-\frac{1}{2}}; \quad \frac{\partial v^B\left(\cdot\right)}{\partial p_2} = -\frac{1}{4} m p_1^{-\frac{1}{2}} p_2^{-\frac{3}{2}}.$$

Le marshalliane, ottenute sostituendo $m^B = p_1 e_1^B + p_2 e_2^B = 20p_2$, sono quindi:

$$x_1^B(\mathbf{p}) = -\frac{\frac{\partial v^B(\cdot)}{\partial p_1}}{\frac{\partial v^B(\cdot)}{\partial m^B}} = \frac{\frac{1}{4}(20p_2)\, p_1^{-\frac{3}{2}} p_2^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2\sqrt{p_1 p_2}}} = \frac{10p_2}{p_1},$$

$$x_2^B(\mathbf{p}) = -\frac{\frac{\partial v^B(\cdot)}{\partial p_2}}{\frac{\partial v^B(\cdot)}{\partial m^B}} = \frac{\frac{1}{4}(20p_2)\, p_1^{-\frac{1}{2}} p_2^{-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2\sqrt{p_1 p_2}}} = 10.$$

I prezzi relativi di equilibrio possono essere ricavati considerando il mercato del bene 2 e imponendo che l'eccesso di domanda del bene sia nullo:

$$x_2^A(\mathbf{p}) + x_2^B(\mathbf{p}) = e_2^A + e_2^B,$$

ossia:

$$\frac{30p_1}{p_1 + p_2} + 10 = 20,$$

e dunque:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2}.$$

Prendendo p_2 come numerario e sostituendo i prezzi di equilibrio nelle funzioni di domanda si trovano quindi le allocazioni di equilibrio:

$$x_1^A = \frac{30 \times \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = 10,$$

$$x_2^A = \frac{30 \times \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = 10,$$

$$x_1^B = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20,$$

$$x_2^B = 10.$$