Microeconomia – a.a. 2017/2018

Corso di Laurea Magistrale in Economia e Politica Economica

Nicola Campigotto · nicola.campigotto2<at>unibo.it

Esercitazione 8 – 4 dicembre 2017

Esercizio 1

Si consideri un'economia à la Robinson Crusoe, con un solo consumatore e un solo produttore, nella quale vi sono due soli beni: il bene di consumo y e il lavoro h. La funzione di produzione è $y = f(h) = h^{\frac{1}{2}}$ e la funzione di utilità è $u(y, l) = \log y + \log l$, dove l denota il tempo libero. La dotazione complessiva di tempo di Robinson è $T = 1$.

1. Indicando con p e w i prezzi unitari del bene finale e del lavoro, rispettivamente, si risolva il problema di Robinson-produttore e si trovino la funzione di offerta di bene y, la funzione di domanda di lavoro e la funzione di profitto.

2. Si risolva il problema di Robinson-consumatore e si trovino le funzioni di domanda del bene finale e di offerta di lavoro.

3. Si fissi $p^* = 1$ e si calcoli il salario di equilibrio. Si calcoli l'allocazione di equilibrio (h^*, y^*) e si fornisca una rappresentazione grafica.

Robinson-il-produttore fronteggia i prezzi p e w, massimizzando il profitto avendo come vincolo la tecnologia:

$$\max_{y,h} \quad \pi(y, h) = py - wh$$
$$\text{s.v.} \quad y = h^{\frac{1}{2}},$$

ovvero, sostituendo la funzione di produzione nella funzione obiettivo:

$$\max_{h} \pi(h) = ph^{\frac{1}{2}} - wh,$$

da cui la condizione del prim'ordine per una soluzione interiore:

$$\frac{\partial \pi(\cdot)}{\partial h} = \frac{1}{2} p h^{-\frac{1}{2}} - w = 0 \Rightarrow \frac{p}{2\sqrt{h}} = w,$$

e la funzione di domanda di lavoro:

$$h^D(p, w) = \left(\frac{p}{2w}\right)^2.$$

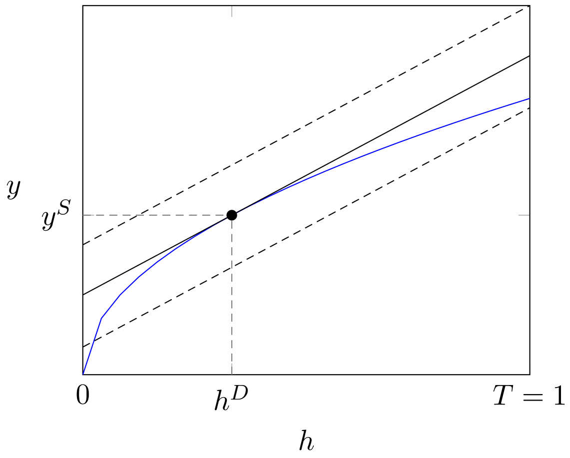
Sostituendo nella funzione di produzione si ottiene quindi la funzione di offerta dell'output:

$$y^S(p, w) = \left[h^D(p, w)\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{p}{2w}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{p}{2w},$$

e la funzione di profitto è perciò:

$$\begin{aligned}\pi(p,w) = py^S(p,w) - wh^D(p,w) &= p\left(\frac{p}{2w}\right) - w\left(\frac{p}{2w}\right)^2 \\ &= \frac{p^2}{2w} - \frac{p^2}{4w} = \frac{p^2}{4w}.\end{aligned}$$

Graficamente, nello spazio (h, y), il problema consiste nel trovare la retta di isoprofitto di equazione $y = \frac{\pi}{p} + \frac{w}{p}h$ (in nero) più alta compatibile con la funzione di produzione $f(h) = h^{\frac{1}{2}}$ (in blu).



Il problema di Robinson-il-consumatore è:

$$\begin{aligned}\max_{y,h} \quad & u(y,h) = \log y + \log(1-h) \\ \text{s.v.} \quad & py = \pi + wh,\end{aligned}$$

dove $(1-h) = l$. Il vincolo esprime il fatto che la ricchezza debba eguagliare la somma di redditi da lavoro e profitti guadagnati come produttore. La lagrangiana corrispondente è $\mathcal{L}(y,h,\lambda) = \log y + \log(1-h) - \lambda(py - \pi - wh)$, da cui il sistema delle condizione del prim'ordine:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial y} = \frac{1}{y} - \lambda p = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial h} = -\frac{1}{1-h} + \lambda w = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda} = py - \pi - wh = 0.$$

Dalla prima equazione si trova $\lambda = \frac{1}{py}$. Dalla seconda si ottiene quindi:

$$-\frac{1}{1-h} + \left(\frac{1}{py}\right)w = 0 \Rightarrow \frac{w}{py} = \frac{1}{1-h} \Rightarrow py = w - wh,$$

e sostituendo nel vincolo:

$$w - wh - \pi - wh = w - 2wh - \pi = 0.$$

La funzione di offerta di lavoro è perciò:

$$h^S(p,w,\pi) = \frac{w-\pi}{2w}.$$

Sostituendo in $py = w - wh$, inoltre:

$$py = w - w\left(\frac{w-\pi}{2w}\right) = \frac{w+\pi}{2} \Rightarrow 2py = w + \pi,$$

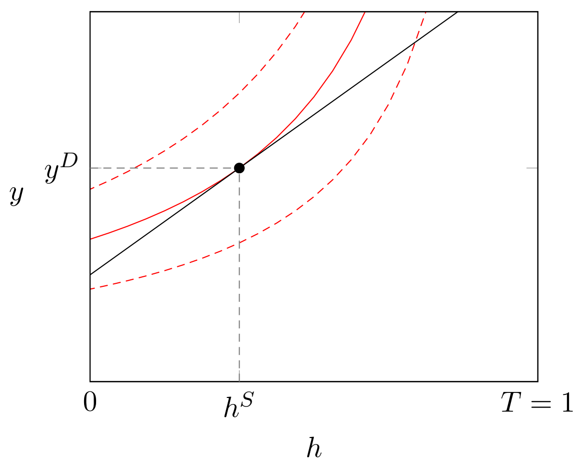
da cui si trova la funzione di domanda dell'output:

$$y^D(p, w, \pi) = \frac{w+\pi}{2p}.$$

Sostituendo la funzione di profitto ricavata dal problema del produttore, $\pi(p, w) = \frac{p^2}{4w}$, l'offerta di lavoro e la domanda di output possono infine essere espresse come:

$$\begin{aligned} h^S(p, w) &= \frac{w - \frac{p^2}{4w}}{2w} = \frac{\frac{4w^2-p^2}{4w}}{2w} = \frac{4w^2-p^2}{8w^2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{p^2}{8w^2}, \\ y^D(p, w) &= \frac{w + \frac{p^2}{4w}}{2p} = \frac{\frac{4w^2+p^2}{4w}}{2p} = \frac{4w^2+p^2}{8wp} \\ &= \frac{w}{2p} + \frac{p}{8w}. \end{aligned}$$

Graficamente, nello spazio (h, y), si tratta di trovare la curva di indifferenza (in rosso) più alta compatibile con il vincolo $y = \frac{\pi}{p} + \frac{w}{p}h$ (in nero). Al crescere delle ore lavorate, l'utilità di Robinson decresce.



In equilibrio, i prezzi w e p sono tali da realizzare l'eguaglianza tra domanda e offerta di output e di lavoro. Posto $p^* = 1$, la condizione di *market-clearing* relativa al mercato di y può essere espressa come $y^D(1, w) = y^S(1, w)$, ossia:

$$\frac{w}{2} + \frac{1}{8w} = \frac{1}{2w} \Rightarrow \frac{w}{2} = \frac{3}{8w},$$

da cui $4w^2 = 3$. Il salario di equilibrio è quindi:

$$w^* = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

mentre la quantità di lavoro offerta e domandata (ottenuta sostituendo p^* e w^* nella funzione di offerta o di domanda di lavoro) è:

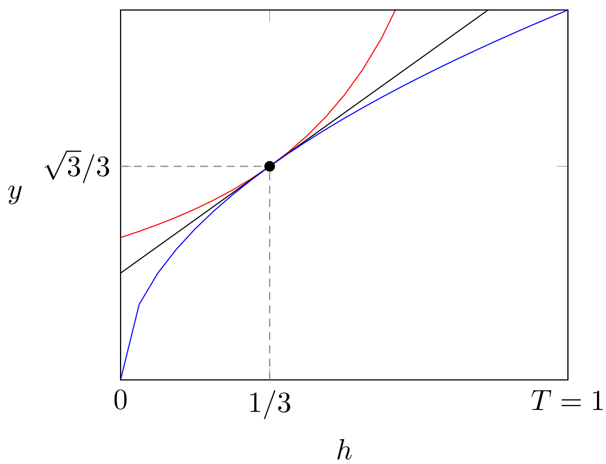
$$h^* = \left(\frac{1}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} \right)^2 = \frac{1}{3}$$

e la quantità ottimale di bene finale offerta e domandata (ottenuta sostituendo p^* e w^* nella funzione di offerta o di domanda di output) è:

$$y^* = \frac{1}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

I profitti di equilibrio, infine, sono:

$$\pi^* = y^* - w^* h^* = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$



Esercizio 2

Si consideri un'economia à la Robinson Crusoe in cui $T = 1$ rappresenta la dotazione iniziale di ore di Robinson, in cui la funzione di produzione di Robinson-produttore è data da $y = f(h) = 2h$ (dove y rappresenta la quantità del bene finale e h rappresenta la quantità di lavoro) ed in cui la funzione di utilità di Robinson-consumatore è $u(y, l) = \left(y^{\frac{1}{2}} + l^{\frac{1}{2}}\right)^2$, dove $l = T - h$ è il tempo libero.

1. Denotando con p il prezzo dell'output e con w il salario, si risolva il problema di massimizzazione del profitto di Robinson-produttore (attenzione al tipo di rendimenti di scala della funzione di produzione).

2. Si risolva il problema di massimizzazione dell'utilità di Robinson-consumatore.

3. Considerando $p = 1$, si calcoli l'equilibrio sui mercati del lavoro e del bene finale.

Il problema di massimizzazione del profitto di Robinson-il-produttore è:

$$\max_h \pi(h) = 2ph - wh,$$

cui corrisponde la condizione del prim'ordine:

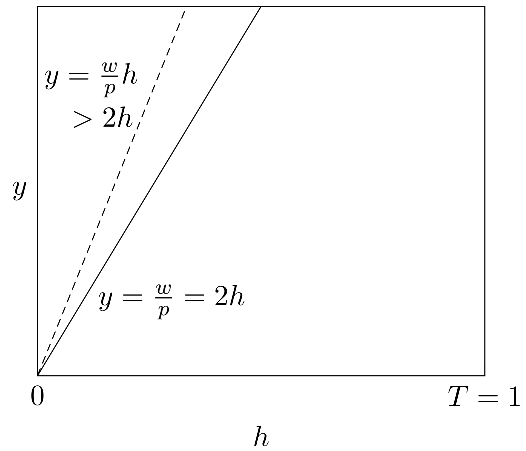
$$\frac{\partial \pi(\cdot)}{\partial h} = 2p - w \leq 0 \Rightarrow w \geq 2p.$$

Essendo la funzione di produzione lineare in h, la domanda di lavoro:

- è pari a zero per ogni $w > 2p$, ossia quando $\frac{w}{p} > 2$ (la pendenza delle rette di isoprofitto è maggiore di quella della funzione di produzione);

- può assumere qualsiasi valore compreso tra zero e infinito quando $w = 2p$.

In entrambi i casi, i profitti dell'impresa sono nulli. D'ora in poi si considererà solo il caso $w = 2p$, cui corrisponde una quantità positiva di ore di lavoro. Quando $w > 2p$, infatti, la scelta ottimale dell'impresa è sempre quella di non utilizzare lavoro e non produrre alcuna unità di output (e anche il consumo è dunque pari a zero).



Il problema di Robinson-il-consumatore è:

$$\max_{y,h} \quad u(y,h) = \left[y^{\frac{1}{2}} + (1-h)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$
$$\text{s.v.} \quad py = wh,$$

dove $(1-h) = l$. La lagrangiana corrispondente è $\mathcal{L}(y,h,\lambda) = \left[y^{\frac{1}{2}} + (1-h)^{\frac{1}{2}}\right]^2 - \lambda(py - wh)$, da cui il sistema delle condizione del prim'ordine:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial y} = 2\left[y^{\frac{1}{2}} + (1-h)^{\frac{1}{2}}\right]\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} - \lambda p = y^{-\frac{1}{2}}\left[y^{\frac{1}{2}} + (1-h)^{\frac{1}{2}}\right] - \lambda p = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial h} = -2\left[y^{\frac{1}{2}} + (1-h)^{\frac{1}{2}}\right]\frac{1}{2}(1-h)^{-\frac{1}{2}} + \lambda w = -(1-h)^{-\frac{1}{2}}\left[y^{\frac{1}{2}} + (1-h)^{\frac{1}{2}}\right] + \lambda w = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda} = py - wh = 0.$$

Dividendo la prima equazione per la seconda, si trova:

$$-\frac{y^{-\frac{1}{2}}}{(1-h)^{-\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1-h}{y}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{p}{w} \Rightarrow \frac{1-h}{y} = \frac{p^2}{w^2},$$

da cui:

$$h = 1 - \frac{yp^2}{w^2} = \frac{w^2 - yp^2}{w^2}.$$

Sostituendo nel vincolo si ha quindi:

$$py = w\left(\frac{w^2 - yp^2}{w^2}\right) \Rightarrow wpy = w^2 - yp^2 \Rightarrow yp\,(w+p) = w^2$$

e la funzione di domanda dell'output è:

$$y^D\,(p,w) = \frac{w^2}{p\,(w+p)}.$$

La funzione di offerta di lavoro è perciò:

$$h^S\,(p,w) = 1 - \frac{p^2}{w^2}\left[\frac{w^2}{p\,(w+p)}\right] = 1 - \frac{p}{w+p} = \frac{w}{w+p}.$$

In equilibrio, i prezzi w e p realizzano l'eguaglianza tra domanda e offerta di output e di lavoro. Ponendo $p^* = 1$ ed eguagliando $y^D\,(p,w)$ e $y^S\,(p,w) = 2h^S\,(p,w)$, si ottiene:

$$\frac{w^2}{w+1} = \frac{2w}{w+1},$$

da cui:

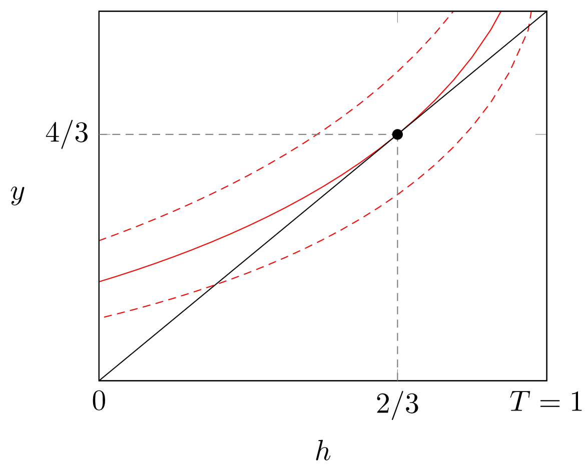
$$w^* = 2.$$

La quantità ottima di lavoro è quindi:

$$h^* = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

e la quantità ottima di output è:

$$y^* = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}.$$



Esercizio 3

Si consideri un'economia con due imprese e due consumatori. Il consumatore 1 possiede interamente l'impresa 1 e il consumatore 2 possiede interamente l'impresa 2. L'impresa 1 produce il bene y_1 utilizzando l'input x secondo la funzione di produzione $y_1 = 2x$. L'impresa 2 produce il bene y_2 utilizzando l'input x secondo la funzione di produzione $y_2 = 3x$. Ciascun consumatore possiede 10 unità di bene x. La funzione di utilità del consumatore 1 è data da $u^1\left(y_1^1, y_2^1\right) = \left(y_1^1\right)^{\frac{2}{5}}\left(y_2^1\right)^{\frac{3}{5}}$ e la funzione di utilità del consumatore 2 è $u^2\left(y_1^2, y_2^2\right) = 10 + \frac{1}{2}\log y_1^2 + \frac{1}{2}\log y_2^2$.

1. Trovare i prezzi di equilibrio dei beni x, y_1 e y_2 denotandoli, rispettivamente, con w, p_1 e p_2.
2. Trovare le quantità di y_1 e y_2 consumate dai due consumatori.
3. Trovare la quantità dell'input x utilizzata da ciascuna impresa.

Posti $y_1 = 2x$ e $y_2 = 3x$, le funzioni di profitto delle due imprese possono essere espresse come:

$$\pi^1(x) = 2p_1x - wx; \qquad \pi^2(x) = 3p_2x - wx.$$

E le condizioni del prim'ordine, nel caso si considerino unicamente quantità positive di lavoro, forniscono le condizioni:

$$w = 2p_1; \qquad w = 3p_2.$$

I profitti di entrambe le imprese sono pari a zero e i prezzi relativi, in equilibrio sono:

$$2p_1 = 3p_2 \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{3}{2}.$$

Poiché ciascun agente possiede 10 unità di x, il cui prezzo unitario è w, il problema di massimizzazione dell'utilità del consumatore 1 è:

$$\begin{aligned} \max_{y_1^1, y_2^1} \quad & u^1\left(y_1^1, y_2^1\right) = \frac{2}{5}\log y_1^1 + \frac{3}{5}\log y_2^1 \\ \text{s.v.} \quad & p_1y_1^1 + p_2y_2^1 = 10w, \end{aligned}$$

cui corrispondono la lagrangiana $\mathcal{L}^1\left(y_1^1, y_2^1, \lambda\right) = \frac{2}{5}\log y_1^1 + \frac{3}{5}\log y_2^1 - \lambda\left(p_1y_1^1 + p_2y_2^1 - 10w\right)$ e le condizioni del prim'ordine:

$$\frac{\partial\mathcal{L}^1(\cdot)}{\partial y_1^1} = \frac{2}{5y_1^1} - \lambda p_1 = 0; \qquad \frac{\partial\mathcal{L}^1(\cdot)}{\partial y_1^1} = \frac{3}{5y_2^1} - \lambda p_2 = 0;$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}^1(\cdot)}{\partial\lambda} = p_1y_1^1 + p_2y_2^1 - 10w = 0.$$

Dividendo la prima equazione per la seconda si ottiene:

$$\frac{\frac{2}{5y_1^1}}{\frac{3}{5y_2^1}} = \frac{2y_2^1}{3y_1^1} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow y_2^1 = \frac{3p_1}{2p_2}y_1^1$$

e sostituendo nel vincolo:

$$p_1y_1^1 + p_2\left(\frac{3p_1}{2p_2}y_1^1\right) = p_1y_1^1 + \frac{3p_1y_1^1}{2} = 10w,$$

ossia $\frac{5}{2}p_1 y_1^1 = 10w$, da cui:

$$y_1^1 = \frac{4w}{p_1}.$$

Segue che:

$$y_2^1 = \frac{3p_1}{2p_2}\left(\frac{4w}{p_1}\right) = \frac{6w}{p_2},$$

e sostituendo $w = 2p_1 = 3p_2$:

$$y_1^1 = \frac{4\left(2p_1\right)}{p_1} = 8; \qquad y_2^1 = \frac{6\left(3p_2\right)}{p_2} = 18.$$

Il problema di massimizzazione dell'utilità del consumatore 2 è invece:

$$\begin{aligned} \max_{y_1^2, y_2^2} \quad & u^2\left(y_1^2, y_2^2\right) = 10 + \frac{1}{2}\log y_1^2 + \frac{1}{2}\log y_2^2 \\ \text{s.v.} \quad & p_1 y_1^2 + p_2 y_2^2 = 10w, \end{aligned}$$

cui corrispondono la lagrangiana $\mathcal{L}^2\left(y_1^2, y_2^2, \mu\right) = 10 + \frac{1}{2}\log y_1^2 + \frac{1}{2}\log y_2^2 - \mu\left(p_1 y_1^2 + p_2 y_2^2 - 10w\right)$ e le condizioni del prim'ordine:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^2(\cdot)}{\partial y_1^2} = \frac{1}{2y_1^2} - \lambda p_1 = 0; \qquad \frac{\partial \mathcal{L}^2(\cdot)}{\partial y_1^2} = \frac{1}{2y_2^2} - \lambda p_2 = 0;$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^2(\cdot)}{\partial \mu} = p_1 y_1^2 + p_2 y_2^2 - 10w = 0.$$

Dividendo la prima equazione per la seconda si ottiene:

$$\frac{\frac{1}{2y_1^2}}{\frac{1}{2y_2^2}} = \frac{y_2^2}{y_1^2} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow y_2^2 = \frac{p_1}{p_2} y_1^2$$

e sostituendo nel vincolo:

$$p_1 y_1^2 + p_2\left(\frac{p_1}{p_2} y_1^2\right) = 2p_1 y_1^2 = 10w,$$

da cui $y_1^2 = \frac{5w}{p_1}$. Segue che:

$$y_2^2 = \frac{p_1}{p_2}\left(\frac{5w}{p_1}\right) = \frac{5w}{p_2},$$

e sostituendo $w = 2p_1 = 3p_2$:

$$y_1^2 = \frac{5\left(2p_1\right)}{p_1} = 10; \qquad y_2^2 = \frac{5\left(3p_2\right)}{p_2} = 15.$$

Il numero di unità del bene 1 consumato nell'economia è $y_1 = y_1^1 + y_1^2 = 8 + 10 = 18$. Per produrre tale quantità, l'impresa 1 impiega $\frac{y_1}{2} = 9$ unità di input x. Il numero di unità del bene 2 consumato nell'economia è invece $y_2 = y_2^1 + y_2^2 = 18 + 15 = 33$. Per produrre tale quantità, l'impresa 2 impiega $\frac{y_2}{3} = 11$ unità di input x.