Microeconomia – a.a. 2017/2018

Corso di Laurea Magistrale in Economia e Politica Economica

Nicola Campigotto · nicola.campigotto2<at>unibo.it

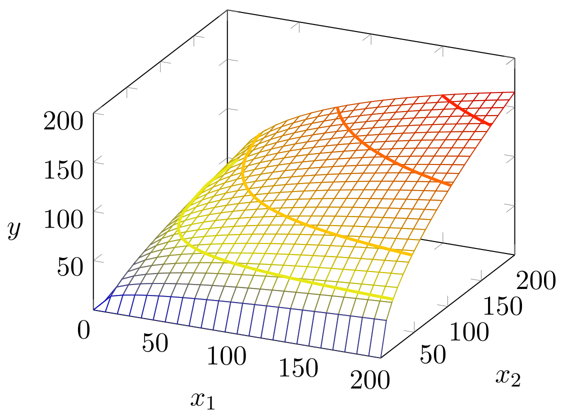
Esercitazione 6 – 20 novembre 2017

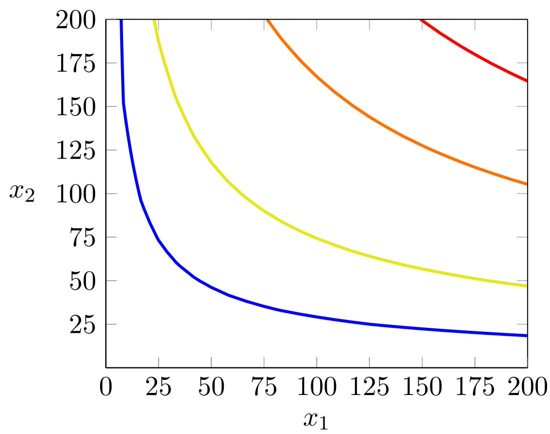
Esercizio 1

Si considerino due soli input e un solo output e una funzione di produzione data da:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{2}}.$$

1. Quali sono i rendimenti di scala mostrati da questa funzione? Dimostrare analiticamente.
2. Trovare le funzioni di domanda degli input.
3. Trovare la funzione di offerta dell'output.





La funzione di produzione esibisce rendimenti di scala decrescenti. Per ogni $\lambda > 1$, infatti,

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1, \lambda x_2) &= 2(\lambda x_1)^{\frac{1}{3}} (\lambda x_2)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2\lambda^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{2}} \\ &= \lambda^{\frac{5}{6}} x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{2}} \\ &< \lambda x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{2}} = \lambda f(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Il problema di massimizzazione del profitto dell'impresa è $\max\limits_{x_1, x_2} \pi(\mathbf{x}) = pf(\mathbf{x}) - \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$, ossia:

$$\max_{x_1, x_2} p\left(2x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{2}}\right) - w_1 x_1 - w_2 x_2,$$

e le condizioni del prim'ordine sono:

$$\frac{\partial \pi(\cdot)}{\partial x_1} = \frac{2}{3} p x_1^{-\frac{2}{3}} x_2^{\frac{1}{2}} - w_1 = 0, \qquad \frac{\partial \pi(\cdot)}{\partial x_2} = p x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{-\frac{1}{2}} - w_2 = 0.$$

Dalla seconda equazione si ottiene:

$$x_1^{\frac{1}{3}} = \frac{w_2}{p} x_2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x_1 = \left(\frac{w_2}{p}\right)^3 x_2^{\frac{3}{2}},$$

e sostituendo nella prima:

$$\frac{2}{3} p \left[\left(\frac{w_2}{p}\right)^3 x_2^{\frac{3}{2}}\right]^{-\frac{2}{3}} x_2^{\frac{1}{2}} = w_1,$$

da cui si trova:

$$\frac{2}{3} p^3 w_2^{-2} x_2^{-\frac{1}{2}} = \frac{2p^3}{3 w_2^2 x_2^{\frac{1}{2}}} = w_1 \Rightarrow x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{2p^3}{3 w_1 w_2^2}.$$

La funzione di domanda del fattore 2 è quindi:

$$x_2(p, \mathbf{w}) = \left(\frac{2p^3}{3 w_1 w_2^2}\right)^2 = \frac{4p^6}{9 w_1^2 w_2^4}$$

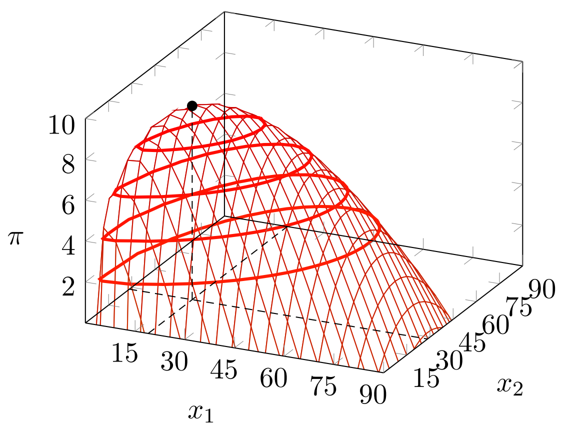
e la funzione di domanda del fattore 1 è:

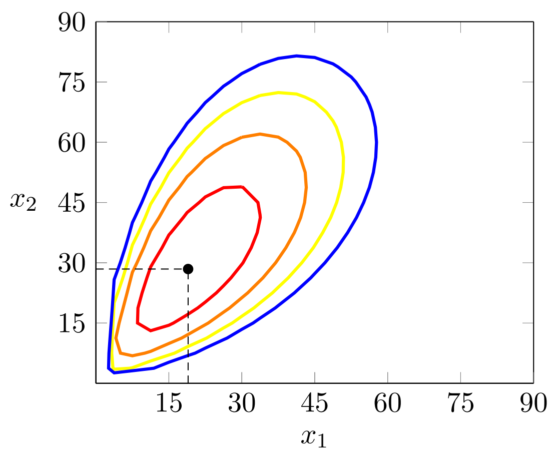
$$x_1(p, \mathbf{w}) = \left(\frac{w_2}{p}\right)^3 \left(\frac{4p^6}{9 w_1^2 w_2^4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{w_2^3}{p^3} \left(\frac{4}{6}\right)^{\frac{3}{2}} p^9 w_1^{-3} w_2^{-6} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 p^6 w_1^{-3} w_2^{-3} = \left(\frac{2p^2}{3 w_1 w_2}\right)^3.$$

La funzione di offerta, $y(p, \mathbf{w}) = f(x_1(p, \mathbf{w}), x_2(p, \mathbf{w}))$, è infine:

$$\begin{aligned} y(p, \mathbf{w}) &= 2 \left[x_1(p, \mathbf{w})\right]^{\frac{1}{3}} \left[x_2(p, \mathbf{w})\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \left[\left(\frac{2p^2}{3 w_1 w_2}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}} \left[\left(\frac{2p^3}{3 w_1 w_2^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{8p^5}{9 w_1^2 w_2^3}. \end{aligned}$$

In figura è rappresentata la funzione di profitto per $(p, w_1, w_2) = (2, 1, 1)$. In questo caso, $x_1^* = \frac{512}{27}$, $x_2^* = \frac{256}{9}$, $y^* = \frac{256}{9}$ e $\pi^* = \frac{256}{27}$.

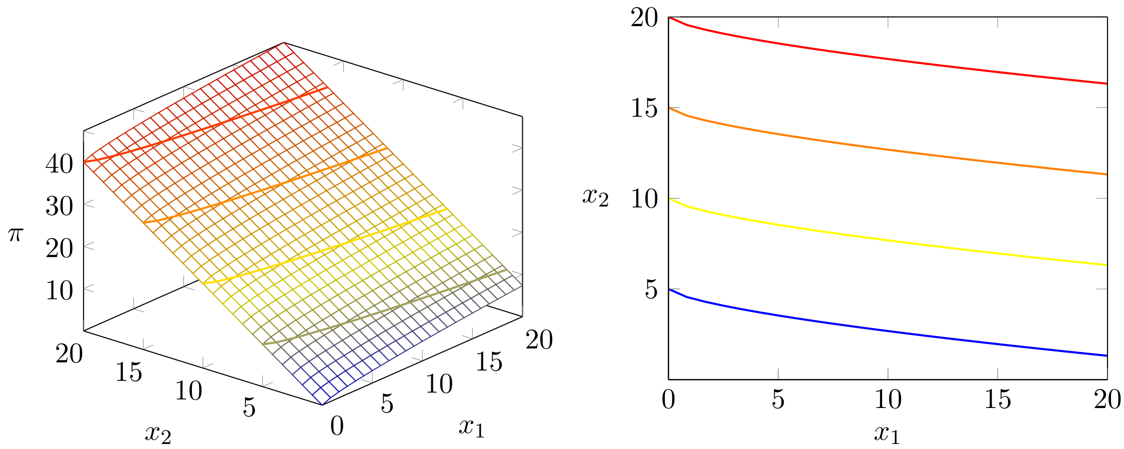




Esercizio 2

Sia la funzione di produzione di un'impresa che opera in mercati perfettamente concorrenziali degli input $f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{2}{3}} + 2x_2$.

1. Quali sono i rendimenti di scala?
2. Si imposti il problema di massimizzazione del profitto e si trovino le funzioni di domanda degli input. Si considerino le condizioni di Kuhn-Tucker per tenere conto di tutte le possibili soluzioni, interiori e d'angolo.
3. Si trovi la funzione di offerta dell'output.
4. Si trovi la funzione di profitto.
5. Si rappresentino graficamente gli isoquanti e le rette di isocosto.
6. Si imposti il problema di minimizzazione dei costi e si ricavino le funzioni di domanda condizionata dei due fattori, supponendo che il livello di produzione desiderato dall'impresa sia pari a y. Si considerino le condizioni di Kuhn-Tucker per tenere conto di tutte le possibili soluzioni, interiori e d'angolo.
7. Si calcoli la funzione di costo di lungo periodo (si considerino tutte le possibili soluzioni del punto precedente).



La funzione di produzione (del tipo quasi-lineare) esibisce rendimenti di scala decrescenti. Per ogni $\lambda > 1$, infatti:

$$
\begin{aligned}
f(\lambda x_1, \lambda x_2) &= (\lambda x_1)^{\frac{2}{3}} + 2\lambda x_2 \\
&= \lambda^{\frac{2}{3}} x_1^{\frac{2}{3}} + 2\lambda x_2 \\
&< \lambda x_1^{\frac{2}{3}} + 2\lambda x_2 = \lambda \left(x_1^{\frac{2}{3}} + 2x_2 \right) = \lambda f(x_1, x_2).
\end{aligned}
$$

Il problema di massimizzazione del profitto dell'impresa è:

$$
\max_{x_1, x_2} p \left(x_1^{\frac{2}{3}} + 2x_2 \right) - w_1 x_1 - w_2 x_2,
$$

e le condizioni di Kuhn-Tucker sono:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi(\cdot)}{\partial x_1} &\leq 0 \Rightarrow \frac{2}{3} p x_1^{-\frac{1}{3}} - w_1 \leq 0 &(1)\\
x_1 \frac{\partial \pi(\cdot)}{\partial x_1} &= 0 \Rightarrow x_1 \left(\frac{2}{3} p x_1^{-\frac{1}{3}} - w_1 \right) = 0 &(2)\\
\frac{\partial \pi(\cdot)}{\partial x_2} &\leq 0 \Rightarrow 2p - w_2 \leq 0 &(3)\\
x_2 \frac{\partial \pi(\cdot)}{\partial x_2} &= 0 \Rightarrow x_2 (2p - w_2) = 0. &(4)
\end{aligned}$$

Procedendo caso per caso, si ha che:

(i) La (1) permette di escludere il caso di una soluzione d'angolo con $x_1^* = 0$ e $x_2^* > 0$, che richiederebbe $w_1 \geq 2p/3x_1^{\frac{1}{3}} = \infty$.

(ii) Nel caso di una soluzione d'angolo con $x_1^* > 0$ e $x_2^* = 0$, la (1) vale come uguaglianza e si ha:

$$\frac{2p}{3x_1^{\frac{1}{3}}} = w_1 \Rightarrow x_1^{\frac{1}{3}} = \frac{2p}{3w_1}.$$

La funzione di domanda del fattore 1 è quindi:

$$x_1(p, w_1) = \left(\frac{2p}{3w_1} \right)^3.$$

Dalla (3) si ottiene inoltre la condizione che determina il verificarsi della soluzione d'angolo:

$$w_2 \geq 2p.$$

(iii) Il caso di una soluzione interna ($x_1^* > 0$ e $x_2^* > 0$) si risolve considerando (1) e (3) come uguaglianze. La funzione di domanda del fattore 1 continua a essere:

$$x_1(p, w_1) = \left(\frac{2p}{3w_1} \right)^3,$$

mentre dalla (3) si ottiene:

$$w_2 = 2p.$$

La quantità ottimale del fattore 2, infine, è indeterminata e può assumere qualsiasi valore non-negativo.

Le funzioni di domanda dei due fattori di produzioni sono perciò:

$$x_1(p, \mathbf{w}) = \left(\frac{2p}{3w_1} \right)^3, \qquad x_2(p, \mathbf{w}) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad w_2 > 2p \\ [0, \infty) & \text{se} \quad w_2 = 2p \end{cases}$$

e la funzione di offerta, $y(p, \mathbf{w}) = x_1(p, \mathbf{w})^{\frac{2}{3}} + 2x_2(p, \mathbf{w})$, è:

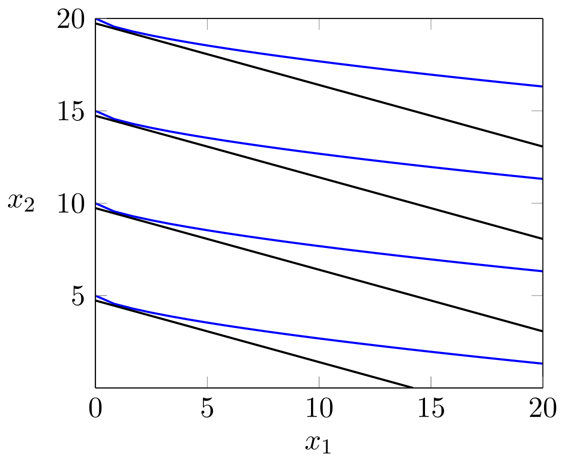
$$y(p, \mathbf{w}) = \begin{cases} \left(\frac{2p}{3w_1} \right)^2 & \text{se} \quad w_2 > 2p \\ \left[\left(\frac{2p}{3w_1} \right)^3, \infty \right) & \text{se} \quad w_2 = 2p. \end{cases}$$

La funzione di profitto, $\pi(\cdot) = p\left[x_1(\cdot)^{\frac{2}{3}} + 2x_2(\cdot)\right] - w_1 x_1(\cdot) - w_2 x_2(\cdot)$, è infine:

$$\pi(p, \mathbf{w}) = p\left(\frac{2p}{3w_1}\right)^2 - w_1\left(\frac{2p}{3w_1}\right)^3$$

se $w_2 > 2p$ e non è univocamente determinata altrimenti.

Si consideri ora il problema di minimizzazione dei costi. In figura sono rappresentati isoquanti (in blu) e rette di isocosto (in nero) per $w_1 = 1$ e $w_2 = 3$. I primi corrispondono a un fascio di curve di equazione $x_2 = y/2 - x_1^{\frac{2}{3}}/2$, le seconde sono un fascio di rette parallele con pendenza $-1/3$.



Il problema di minimizzazione dei costi dell'impresa è dato da:

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \quad & w_1 x_1 + w_2 x_2 \\ \text{s.v.} \quad & x_1^{\frac{2}{3}} + 2x_2 \geq y \end{aligned}$$

e si risolve costruendo la Lagrangiana $\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = w_1 x_1 + w_2 x_2 - \lambda(x_1^{\frac{2}{3}} + 2x_2 - y)$ e ricavando le condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_1} \geq 0 \Rightarrow w_1 - \frac{2}{3}\lambda x_1^{-\frac{1}{3}} \geq 0 \tag{1}$$

$$x_1 \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow x_1\left(w_1 - \frac{2}{3}\lambda x_1^{-\frac{1}{3}}\right) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_2} \geq 0 \Rightarrow w_2 - 2\lambda \geq 0 \tag{3}$$

$$x_2 \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow x_2(w_2 - 2\lambda) = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow x_1^{\frac{2}{3}} + 2x_2 - y = 0. \tag{5}$$

Procedendo caso per caso, si ha che:

(i) Il caso di una soluzione d'angolo sull'asse delle ordinate ($x_1^* = 0$ e $x_2^* > 0$) è escluso a causa della (1), che richiederebbe $w_1 \geq 2\lambda/3x_1^{\frac{1}{3}} = \infty$.

(ii) Il caso di una soluzione d'angolo sull'asse delle ascisse ($x_1^* > 0$ e $x_2^* = 0$) permette di riscrivere la (5) come $x_1^{\frac{2}{3}} = y$, da cui si ottiene la funzione di domanda del fattore 1:

$$x_1(y) = y^{\frac{3}{2}}.$$

Poiché $x_1^* > 0$, la (1) vale come uguaglianza. Si ha dunque:

$$w_1 - \frac{2}{3}\lambda\left(y^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}} = 0 \Rightarrow \frac{2\lambda}{3y^{\frac{1}{2}}} = w_1 \Rightarrow \lambda = \frac{3w_1y^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

Sostituendo nella (3) si trova infine:

$$w_2 - 2\left(\frac{3w_1y^{\frac{1}{2}}}{2}\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{w_2}{w_1} \geq 3y^{\frac{1}{2}},$$

che è la condizione che determina il verificarsi della soluzione d'angolo.

(iii) Il caso di una soluzione interna ($x_1^* > 0$ e $x_2^* > 0$) si risolve considerando (1) e (3) come uguaglianze. Il moltiplicatore di Lagrange è:

$$\lambda = \frac{w_2}{2}$$

e la (1) si può quindi riscrivere come:

$$w_1 - \frac{2}{3}\left(\frac{w_2}{2}\right)x_1^{-\frac{1}{3}} = 0 \Rightarrow w_1 = \frac{w_2}{3x_1^{\frac{1}{3}}}.$$

La funzione di domanda relativa al fattore 1 è perciò:

$$x_1(\mathbf{w}) = \left(\frac{w_2}{3w_1}\right)^3$$

e sostituendo nel vincolo si trova $\left[\left(\frac{w_2}{3w_1}\right)^3\right]^{\frac{2}{3}} + 2x_2 = y$, da cui si ottiene la funzione di domanda relativa al fattore 2:

$$x_2(y, \mathbf{w}) = \frac{y}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{w_2}{3w_1}\right)^2,$$

che è maggiore di zero se e solo se $\frac{w_2}{w_1} < 3y^{\frac{1}{2}}$.

Le funzioni di domanda condizionata dei fattori sono dunque:

$$x_1(y, \mathbf{w}) = \begin{cases} y^{\frac{3}{2}} & \text{se} \quad \frac{w_2}{w_1} \geq 3y^{\frac{1}{2}} \\ \left(\frac{w_2}{3w_1}\right)^3 & \text{se} \quad \frac{w_2}{w_1} < 3y^{\frac{1}{2}} \end{cases} \qquad x_2(y, \mathbf{w}) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \frac{w_2}{w_1} \geq 3y^{\frac{1}{2}} \\ \frac{y}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{w_2}{3w_1}\right)^2 & \text{se} \quad \frac{w_2}{w_1} < 3y^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

e la funzione di costo di lungo periodo, $c(y, \mathbf{w}) = w_1x_1(y, \mathbf{w}) + w_2x_2(y, \mathbf{w})$, è:

$$c(y, \mathbf{w}) = \begin{cases} w_1y^{\frac{3}{2}} & \text{se} \quad \frac{w_2}{w_1} \geq 3y^{\frac{1}{2}} \\ \frac{w_2y}{2} - \frac{w_2^3}{54w_1^2} & \text{se} \quad \frac{w_2}{w_1} < 3y^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Esercizio 3

Si consideri un'impresa che produce un solo output y utilizzando tre input secondo la funzione di produzione $y = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma}$, con $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

1. Che tipo di rendimenti di scala mostra la funzione di produzione?
2. Denotando con w_1, w_2 e w_3, rispettivamente, i prezzi dei tre input, si imposti il problema di minimizzazione dei costi e si ricavino le funzioni di domanda condizionata dei fattori.
3. Si calcoli la funzione di costo totale di lungo periodo (semplificando il più possibile). Che tipo di andamento ha?
4. Si verifichi il Lemma di Shephard per l'input 1.

Poiché $f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = (\lambda x_1)^{\alpha} (\lambda x_2)^{\beta} (\lambda x_3)^{\gamma} = \lambda^{\alpha+\beta+\gamma} x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma}$, la funzione di produzione esibisce rendimenti di scala:

- crescenti se $(\alpha + \beta + \gamma) > 1$;
- costanti se $(\alpha + \beta + \gamma) = 1$;
- decrescenti se $(\alpha + \beta + \gamma) < 1$.

Il problema di minimizzazione dei costi dell'impresa è:

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2, x_3} \quad & w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 \\ \text{s.v.} \quad & x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma} \geq y, \end{aligned}$$

e la lagrangiana corrispondente è:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 - \lambda \left(x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma} - y \right).$$

Le condizioni del primo ordine sono quindi:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_1} = w_1 - \lambda \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta} x_3^{\gamma} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_2} = w_2 - \lambda \beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1} x_3^{\gamma} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_3} = w_3 - \lambda \gamma x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma-1} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda} = x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma} - y = 0.$$

Dalla prima e dalla seconda equazione si ottiene:

$$\frac{w_1}{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta} x_3^{\gamma}} = \frac{w_2}{\beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1} x_3^{\gamma}} = \lambda,$$

da cui si trova:

$$w_1 \beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1} x_3^{\gamma} = w_2 \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta} x_3^{\gamma},$$

e quindi:

$$x_1 = \frac{\alpha w_2}{\beta w_1} x_2.$$

Analogamente, dalla seconda e dalla terza equazione si ottiene:

$$\frac{w_2}{\beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1} x_3^\gamma} = \frac{w_3}{\gamma x_1^\alpha x_2^\beta x_3^{\gamma-1}} \Rightarrow w_2 \gamma x_1^\alpha x_2^\beta x_3^{\gamma-1} = w_3 \beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1} x_3^\gamma,$$

e dunque:

$$x_3 = \frac{\gamma w_2}{\beta w_3} x_2.$$

Il vincolo si può perciò riscrivere come:

$$\left(\frac{\alpha w_2}{\beta w_1} x_2\right)^\alpha x_2^\beta \left(\frac{\gamma w_2}{\beta w_3} x_2\right)^\gamma = x_2^{\alpha+\beta+\gamma} \left(\frac{\alpha w_2}{\beta w_1}\right)^\alpha \left(\frac{\gamma w_2}{\beta w_3}\right)^\gamma = y$$

da cui si trova la domanda condizionata del fattore 2:

$$\begin{aligned} x_2(y, \mathbf{w}) &= \left[y \left(\frac{\beta w_1}{\alpha w_2}\right)^\alpha \left(\frac{\beta w_3}{\gamma w_2}\right)^\gamma\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}} \\ &= \left[y \left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{w_2}\right)^{\alpha+\gamma} \left(\frac{w_3}{\gamma}\right)^\gamma\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}}. \end{aligned}$$

La domanda condizionata del fattore 1 è quindi:

$$\begin{aligned} x_1(y, \mathbf{w}) = \frac{\alpha w_2}{\beta w_1} x_2(y, \mathbf{w}) &= \frac{\alpha w_2}{\beta w_1} \left[y \left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{w_2}\right)^{\alpha+\gamma} \left(\frac{w_3}{\gamma}\right)^\gamma\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}} \\ &= \left(\frac{\beta}{w_2}\right)^{-1} \left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{-1} y^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}} \left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}} \left(\frac{\beta}{w_2}\right)^{\frac{\alpha+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}} \left(\frac{w_3}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}} \\ &= y^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}} \left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}-1} \left(\frac{\beta}{w_2}\right)^{\frac{\alpha+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}-1} \left(\frac{w_3}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}} \\ &= y^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}} \left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\frac{-\beta-\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}} \left(\frac{\beta}{w_2}\right)^{\frac{-\beta}{\alpha+\beta+\gamma}} \left(\frac{w_3}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}} \\ &= \left[y \left(\frac{\alpha}{w_1}\right)^{\beta+\gamma} \left(\frac{w_2}{\beta}\right)^\beta \left(\frac{w_3}{\gamma}\right)^\gamma\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}} \end{aligned}$$

mentre la domanda condizionata del fattore 3 è:

$$\begin{aligned} x_3(y, \mathbf{w}) = \frac{\gamma w_2}{\beta w_3} x_2(y, \mathbf{w}) &= \frac{\gamma w_2}{\beta w_3} \left[y \left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{w_2}\right)^{\alpha+\gamma} \left(\frac{w_3}{\gamma}\right)^\gamma\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}} \\ &= \left(\frac{\beta}{w_2}\right)^{-1} \left(\frac{w_3}{\gamma}\right)^{-1} y^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}} \left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}} \left(\frac{\beta}{w_2}\right)^{\frac{\alpha+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}} \left(\frac{w_3}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}} \\ &= y^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}} \left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}} \left(\frac{\beta}{w_2}\right)^{\frac{\alpha+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}-1} \left(\frac{w_3}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}-1} \\ &= y^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}} \left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}} \left(\frac{\beta}{w_2}\right)^{\frac{-\beta}{\alpha+\beta+\gamma}} \left(\frac{w_3}{\gamma}\right)^{\frac{-\alpha-\beta}{\alpha+\beta+\gamma}} \\ &= \left[y \left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^\alpha \left(\frac{w_2}{\beta}\right)^\beta \left(\frac{\gamma}{w_3}\right)^{\alpha+\beta}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}}. \end{aligned}$$

La funzione di costo di lungo periodo è $c\left(y,\mathbf{w}\right)=\sum_{i=1}^{3}w_i x_i\left(y,\mathbf{w}\right)$, ossia:

$$c\left(y,\mathbf{w}\right)=\underbrace{w_1\left[y\left(\frac{\alpha}{w_1}\right)^{\beta+\gamma}\left(\frac{w_2}{\beta}\right)^{\beta}\left(\frac{w_3}{\gamma}\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}}}_{(1)}+\underbrace{w_2\left[y\left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{w_2}\right)^{\alpha+\gamma}\left(\frac{w_3}{\gamma}\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}}}_{(2)}+$$

$$+\underbrace{w_3\left[y\left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{w_2}{\beta}\right)^{\beta}\left(\frac{\gamma}{w_3}\right)^{\alpha+\beta}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}}}_{(3)}.$$

Il primo addendo si può riscrivere come:

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\alpha}w_1\left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{-\frac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}}\left[y\left(\frac{w_2}{\beta}\right)^{\beta}\left(\frac{w_3}{\gamma}\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}} &= \alpha\left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{1-\frac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}}\left[y\left(\frac{w_2}{\beta}\right)^{\beta}\left(\frac{w_3}{\gamma}\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}}\\
&= \alpha\left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}}\left[y\left(\frac{w_2}{\beta}\right)^{\beta}\left(\frac{w_3}{\gamma}\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}}\\
&= \alpha\left[y\left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{w_2}{\beta}\right)^{\beta}\left(\frac{w_3}{\gamma}\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}},
\end{aligned}$$

il secondo come:

$$\begin{aligned}
\frac{\beta}{\beta}w_2\left(\frac{w_2}{\beta}\right)^{-\frac{\alpha+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}}\left[y\left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{w_3}{\gamma}\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}} &= \beta\left(\frac{w_2}{\beta}\right)^{1-\frac{\alpha+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}}\left[y\left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{w_3}{\gamma}\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}}\\
&= \beta\left(\frac{w_2}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}}\left[y\left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{w_3}{\gamma}\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}}\\
&= \beta\left[y\left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{w_2}{\beta}\right)^{\beta}\left(\frac{w_3}{\gamma}\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}},
\end{aligned}$$

e il terzo come:

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma}{\gamma}w_2\left(\frac{w_3}{\gamma}\right)^{-\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+\gamma}}\left[y\left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{w_2}{\beta}\right)^{\beta}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}} &= \gamma\left(\frac{w_3}{\gamma}\right)^{1-\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+\gamma}}\left[y\left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{w_2}{\beta}\right)^{\beta}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}}\\
&= \gamma\left(\frac{w_3}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}}\left[y\left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{w_2}{\beta}\right)^{\beta}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}}\\
&= \gamma\left[y\left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{w_2}{\beta}\right)^{\beta}\left(\frac{w_3}{\gamma}\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}}.
\end{aligned}$$

Sostituendo le espressioni trovate per gli addendi (1), (2) e (3) e raccogliendo si trova quindi:

$$c\left(y,\mathbf{w}\right)=\left(\alpha+\beta+\gamma\right)\left[y\left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{w_2}{\beta}\right)^{\beta}\left(\frac{w_3}{\gamma}\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}},$$

che è:

- omogenea di grado uno in $\mathbf{w}$;

- crescente in y e $\mathbf{w}$;

- concava in $\mathbf{w}$;

- continua in $\mathbf{w}$.

Il Lemma di Shephard per l'input 1, infine, è verificato calcolando:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c(y,\mathbf{w})}{\partial w_1} &= (\alpha+\beta+\gamma)\left[y\left(\frac{w_2}{\beta}\right)^{\beta}\left(\frac{w_3}{\gamma}\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\right)\left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\\
&= \left[y\left(\frac{w_2}{\beta}\right)^{\beta}\left(\frac{w_3}{\gamma}\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}}\left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\frac{-\beta-\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}}\\
&= \left[y\left(\frac{w_2}{\beta}\right)^{\beta}\left(\frac{w_3}{\gamma}\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}}\left(\frac{\alpha}{w_1}\right)^{\frac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}}\\
&= \left[y\left(\frac{\alpha}{w_1}\right)^{\beta+\gamma}\left(\frac{w_2}{\beta}\right)^{\beta}\left(\frac{w_3}{\gamma}\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}}\\
&= x_1(y,\mathbf{w}).
\end{aligned}$$

Esercizio 4

(continua da 5.5) Sia la funzione di un'impresa $y = f(x_1,x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}} + 4x_2^{\frac{1}{2}}$.

1. Verificare il Lemma di Hotelling per le domande dei fattori e l'offerta dell'output.

2. Calcolare la matrice di sostituzione (Hessiana della funzione di profitto). Quali caratteristiche ha?

3. I due fattori sono sostituti o complementi?

4. Si imposti il problema di minimizzazione dei costi e si ricavino le funzioni di domanda condizionata dei due fattori, supponendo che il livello di produzione desiderato dall'impresa sia pari a y.

5. Si calcoli la funzione di costo di lungo periodo.

6. Si sostituiscano le domande condizionate dei fattori nell'espressione dei profitti e si massimizzi il profitto rispetto all'output soltanto. Verificare che la funzione di offerta dell'output e le domande degli input (non condizionate) così ottenute coincidano con quelle ricavate al punto 1).

Il Lemma di Hotelling permette di ricavare le funzioni di domanda dei fattori e la funzione di offerta dell'output a partire dalla funzione di profitto:

$$\frac{\partial\pi(p,\mathbf{w})}{\partial w_i} = -x_i(p,\mathbf{w}); \qquad \frac{\partial\pi(p,\mathbf{w})}{\partial p} = y(p,\mathbf{w}).$$

Derivando $\pi(\cdot) = p^2\left(\frac{1}{w_1}+\frac{4}{w_2}\right)$ si ottengono:

$$\frac{\partial\pi(\cdot)}{\partial w_1} = -\frac{p^2}{w_1^2} = -\left(\frac{p}{w_1}\right)^2 = -x_1(p,w_1), \qquad \frac{\partial\pi(\cdot)}{\partial w_2} = -\frac{4p^2}{w_2^2} = -\left(\frac{2p}{w_2}\right)^2 = -x_2(p,w_2),$$

$$\frac{\partial \pi\left(\cdot\right)}{\partial p}=2p\left(\frac{1}{w_1}+\frac{4}{w_2}\right)=y\left(p,\mathbf{w}\right).$$

La matrice di sostituzione descrive gli effetti, diretti ed incrociati, di una variazione dei prezzi di output e input sulle loro quantità. Essa corrisponde all'Hessiana della funzione di profitto ed è dunque:

$$S\left(p,\mathbf{w}\right)=\begin{bmatrix}\frac{\partial \pi^2(\cdot)}{\partial p^2} & \frac{\partial \pi^2(\cdot)}{\partial p\partial w_1} & \frac{\partial \pi^2(\cdot)}{\partial p\partial w_2}\\ \frac{\partial \pi^2(\cdot)}{\partial w_1\partial p} & \frac{\partial \pi^2(\cdot)}{\partial w_1^2} & \frac{\partial \pi^2(\cdot)}{\partial w_1\partial w_2}\\ \frac{\partial \pi^2(\cdot)}{\partial w_2\partial p} & \frac{\partial \pi^2(\cdot)}{\partial w_2\partial w_1} & \frac{\partial \pi^2(\cdot)}{\partial w_2^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial y(\cdot)}{\partial p} & \frac{\partial y(\cdot)}{\partial w_1} & \frac{\partial y(\cdot)}{\partial w_2}\\ -\frac{\partial x_1(\cdot)}{\partial p} & -\frac{\partial x_1(\cdot)}{\partial w_1} & -\frac{\partial x_1(\cdot)}{\partial w_2}\\ -\frac{\partial x_2(\cdot)}{\partial p} & -\frac{\partial x_2(\cdot)}{\partial w_1} & -\frac{\partial x_2(\cdot)}{\partial w_2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{2}{w_1}+\frac{8}{w_2} & -\frac{2p}{w_1^2} & -\frac{8p}{w_2^2}\\ -\frac{2p}{w_1^2} & \frac{2p^2}{w_1^3} & 0\\ -\frac{8p}{w_2^2} & 0 & \frac{8p^2}{w_2^3}\end{bmatrix}.$$

La matrice è simmetrica, e gli elementi sulla diagonale principale sono tutti positivi: l'offerta di output è quindi crescente in p, la domanda dell'input 1 è decrescente in w_1 e la domanda dell'input 2 è decrescente in w_2. Il segno della forma quadratica associata alla matrice può essere verificato utilizzando il criterio di Sylvester e ricavando le sottomatrici principali di $S\left(p,\mathbf{w}\right)$:

$$D_1=\left[\tfrac{2}{w_1}+\tfrac{8}{w_2}\right],\qquad D_2=\begin{bmatrix}\frac{2}{w_1}+\frac{8}{w_2} & -\frac{2p}{w_1^2}\\ -\frac{2p}{w_1^2} & \frac{2p^2}{w_1^3}\end{bmatrix},$$

$$D_3=\begin{bmatrix}\frac{2}{w_1}+\frac{8}{w_2} & -\frac{2p}{w_1^2} & -\frac{8p}{w_2^2}\\ -\frac{2p}{w_1^2} & \frac{2p^2}{w_1^3} & 0\\ -\frac{8p}{w_2^2} & 0 & \frac{8p^2}{w_2^3}\end{bmatrix}=S\left(p,\mathbf{w}\right),$$

i cui determinanti sono:

$$|D_1|=\frac{2}{w_1}+\frac{8}{w_2}>0,$$

$$\begin{aligned}|D_2|&=\left(\frac{2}{w_1}+\frac{8}{w_2}\right)\frac{2p^2}{w_1^3}-\left(\frac{2p}{w_1^2}\right)^2\\&=\frac{4p^2}{w_1^4}+\frac{16p^2}{w_1^3w_2}-\frac{4p^2}{w_1^4}=\frac{16p^2}{w_1^3w_2}>0,\end{aligned}$$

e, sviluppando rispetto alla seconda riga,

$$\begin{aligned}|D_3|&=\frac{2p}{w_1^2}\begin{vmatrix}-\frac{2p}{w_1^2} & -\frac{8p}{w_2^2}\\ 0 & \frac{8p^2}{w_2^3}\end{vmatrix}+\frac{2p^2}{w_1^3}\begin{vmatrix}\frac{2}{w_1}+\frac{8}{w_2} & -\frac{8p}{w_2^2}\\ -\frac{8p}{w_2^2} & \frac{8p^2}{w_2^3}\end{vmatrix}\\&=\frac{2p}{w_1^2}\left[\left(-\frac{2p}{w_1^2}\right)\frac{8p^2}{w_2^3}\right]+\frac{2p^2}{w_1^3}\left[\left(\frac{2}{w_1}+\frac{8}{w_2}\right)\frac{8p^2}{w_2^3}-\left(\frac{8p}{w_2^2}\right)^2\right]\\&=\frac{2p}{w_1^2}\left(-\frac{16p^3}{w_1^2w_2^3}\right)+\frac{2p^2}{w_1^3}\left(\frac{16p^2}{w_1w_2^3}+\frac{64p^2}{w_2^4}-\frac{64p^2}{w_2^4}\right)\\&=-\frac{32p^4}{w_1^4w_2^3}+\frac{32p^4}{w_1^4w_2^3}=0.\end{aligned}$$

La forma quadratica associata alla matrice di sostituzione è dunque semidefinita positiva, e la funzione di profitto $\pi\left(p,\mathbf{w}\right)$ è convessa in $\left(p,\mathbf{w}\right)$.

I due fattori di produzione sono indipendenti (a fronte di una variazione del prezzo di un fattore, la quantità domandata dell'altro non cambia). Gli effetti di prezzo incrociati relativi alla domanda dei due input sono infatti:

$$\frac{\partial x_1(\cdot)}{\partial w_2} = \frac{\partial x_2(\cdot)}{\partial w_1} = 0$$

Il problema di minimizzazione dei costi dell'impresa è:

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \quad & w_1 x_1 + w_2 x_2 \\ \text{s.v.} \quad & 2x_1^{\frac{1}{2}} + 4x_2^{\frac{1}{2}} \geq y. \end{aligned}$$

Considerando unicamente soluzioni interiori, si ricavano la Lagrangiana $\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = w_1x_1 + w_2x_2 - \lambda(2x_1^{\frac{1}{2}} + 4x_2^{\frac{1}{2}} - y)$ e le condizioni del prim'ordine:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_1} = w_1 - \lambda x_1^{-\frac{1}{2}} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_2} = w_2 - 2\lambda x_2^{-\frac{1}{2}} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda} = 2x_1^{\frac{1}{2}} + 4x_2^{\frac{1}{2}} - y = 0.$$

Dividendo la prima per la seconda, si trova:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{x_1^{-\frac{1}{2}}}{2x_2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{x_2^{\frac{1}{2}}}{2x_1^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{2w_1}{w_2} x_1^{\frac{1}{2}}$$

e dunque:

$$x_2 = \left(\frac{2w_1}{w_2}\right)^2 x_1.$$

Il vincolo si può perciò riscrivere come:

$$2x_1^{\frac{1}{2}} + 4\left[\left(\frac{2w_1}{w_2}\right)^2 x_1\right]^{\frac{1}{2}} = 2x_1^{\frac{1}{2}} + 4\left(\frac{2w_1}{w_2}\right) x_1^{\frac{1}{2}} = 2x_1^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{4w_1}{w_2}\right) = 2x_1^{\frac{1}{2}}\left(\frac{w_2 + 4w_1}{w_2}\right) = y,$$

da cui si ottiene:

$$x_1^{\frac{1}{2}} = \frac{yw_2}{2(4w_1 + w_2)}.$$

La funzione di domanda condizionata relativa al fattore 1 è quindi:

$$x_1(y, \mathbf{w}) = \left[\frac{yw_2}{2(4w_1 + w_2)}\right]^2$$

e la funzione di domanda condizionata relativa al fattore 2 è:

$$\begin{aligned} x_2(y, \mathbf{w}) &= \left(\frac{2w_1}{w_2}\right)^2 \left[\frac{yw_2}{2(4w_1 + w_2)}\right]^2 \\ &= \left(\frac{yw_1}{4w_1 + w_2}\right)^2. \end{aligned}$$

La funzione di costo, ricavata sostituendo $x_1(y, \mathbf{w})$ e $x_2(y, \mathbf{w})$ in $w_1x_1 + w_2x_2$, è:

$$\begin{aligned} c(y, \mathbf{w}) = w_1 \left[\frac{yw_2}{2(4w_1 + w_2)} \right]^2 + w_2 \left(\frac{yw_1}{4w_1 + w_2} \right)^2 &= \frac{y^2 w_1 w_2^2}{4(4w_1 + w_2)^2} + \frac{y^2 w_1^2 w_2}{(4w_1 + w_2)^2} \\ &= \frac{y^2 w_1 w_2^2 + 4y^2 w_1^2 w_2}{4(4w_1 + w_2)^2} \\ &= \frac{y^2 w_1 w_2 (4w_1 + w_2)}{4(4w_1 + w_2)^2} \\ &= \frac{y^2 w_1 w_2}{4(4w_1 + w_2)}. \end{aligned}$$

Sostituendo le domande condizionate dei fattori nell'espressione di $\pi(\cdot)$, infine, il problema di massimizzazione del profitto si può riscrivere come:

$$\max_y \pi(y) = py - \frac{y^2 w_1 w_2}{4(4w_1 + w_2)}.$$

La condizione del prim'ordine, ottenuta derivando rispetto all'output, è:

$$\frac{\partial \pi(y)}{\partial y} = p - \frac{y w_1 w_2}{2(4w_1 + w_2)} = 0,$$

da cui si trova:

$$\begin{aligned} y(p, \mathbf{w}) &= \frac{2p(4w_1 + w_2)}{w_1 w_2} \\ &= \frac{8p}{w_2} + \frac{2p}{w_1} = 2p\left(\frac{1}{w_1} + \frac{4}{w_2} \right), \end{aligned}$$

che, sostituita in $x_1(y, \mathbf{w})$ e $x_2(y, \mathbf{w})$, restituisce le funzioni di domanda non condizionate dei fattori.

Esercizio 5

(continua da 5.6) Sia $y = f(x_1, x_2) = \min\left\{ x_1;\ x_2^{\frac{1}{2}} \right\}$.

1. Verificare il Lemma di Hotelling per le domande dei fattori e l'offerta dell'output.
2. Calcolare la matrice di sostituzione (Hessiana della funzione di profitto). Quali caratteristiche ha?
3. Si imposti il problema di minimizzazione dei costi e si ricavino le funzioni di domanda condizionata dei due fattori, supponendo che il livello di produzione desiderato dall'impresa sia pari a y.
4. Si calcoli la funzione di costo di lungo periodo.
5. Si sostituiscano le domande condizionate dei fattori nell'espressione dei profitti e si massimizzi il profitto rispetto all'output soltanto. Verificare che la funzione di offerta dell'output e le domande degli input (non condizionate) così ottenute coincidano con quelle ricavate al punto 1).

Data la funzione di profitto $\pi(p, \mathbf{w}) = \frac{(p-w_1)^2}{4w_2}$, il Lemma di Hotelling è verificato calcolando:

$$\frac{\partial \pi(\cdot)}{\partial w_1} = -\frac{2(p-w_1)}{4w_2} = -\frac{p-w_1}{2w_2} = -x_1(p, \mathbf{w}),$$

$$\frac{\partial \pi(\cdot)}{\partial w_2} = -\frac{(p-w_1)^2}{4w_2^2} = -\left(\frac{p-w_1}{2w_2}\right)^2 = -x_2(p, \mathbf{w}),$$

$$\frac{\partial \pi(\cdot)}{\partial p} = \frac{2(p-w_1)}{4w_2} = \frac{p-w_1}{2w_2} = y(p, \mathbf{w}).$$

La matrice di sostituzione è:

$$S(p, \mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2w_2} & -\frac{1}{2w_2} & -\frac{p-w_1}{2w_2^2} \\ -\frac{1}{2w_2} & \frac{1}{2w_2} & \frac{p-w_1}{2w_2^2} \\ -\frac{p-w_1}{2w_2^2} & \frac{p-w_1}{2w_2^2} & \frac{(p-w_1)^2}{2w_2^3} \end{bmatrix}$$

ed è simmetrica. Gli elementi sulla diagonale principale sono tutti positivi e la forma quadratica ad essa associata è semidefinita positiva, essendo:

$$|D_2| = \frac{1}{2w_2} > 0,$$

$$|D_1| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2w_2} & -\frac{1}{2w_2} \\ -\frac{1}{2w_2} & \frac{1}{2w_2} \end{vmatrix} = 0,$$

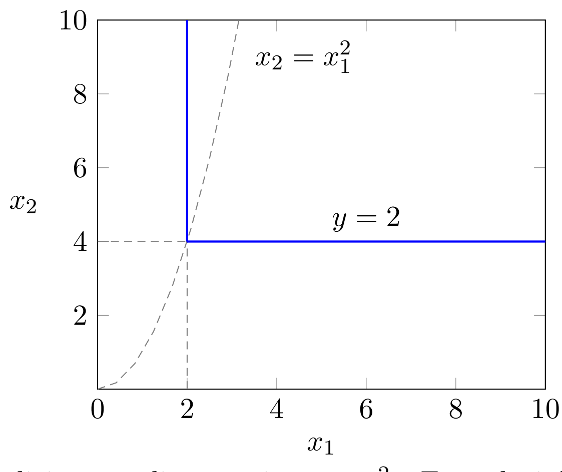
$$|D_3| = -\frac{p-w_1}{2w_2^2}\begin{vmatrix} -\frac{1}{2w_2} & -\frac{p-w_1}{2w_2^2} \\ \frac{1}{2w_2} & \frac{p-w_1}{2w_2^2} \end{vmatrix} - \frac{p-w_1}{2w_2^2}\begin{vmatrix} \frac{1}{2w_2} & -\frac{p-w_1}{2w_2^2} \\ -\frac{1}{2w_2} & \frac{p-w_1}{2w_2^2} \end{vmatrix} + \frac{(p-w_1)^2}{2w_2^3}\begin{vmatrix} \frac{1}{2w_2} & -\frac{1}{2w_2} \\ -\frac{1}{2w_2} & \frac{1}{2w_2} \end{vmatrix} = 0,$$

dove l'ultimo minore principale è calcolato sviluppando rispetto alla terza riga e osservando che:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2w_2} & -\frac{p-w_1}{2w_2^2} \\ \frac{1}{2w_2} & \frac{p-w_1}{2w_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2w_2} & -\frac{p-w_1}{2w_2^2} \\ -\frac{1}{2w_2} & \frac{p-w_1}{2w_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2w_2} & -\frac{1}{2w_2} \\ -\frac{1}{2w_2} & \frac{1}{2w_2} \end{vmatrix} = 0.$$

Il problema di minimizzazione dei costi dell'impresa è:

$$\min_{x_1,x_2} \quad w_1x_1 + w_2x_2$$
$$\text{s.v.} \quad \min\left\{x_1;\ x_2^{\frac{1}{2}}\right\} \geq y.$$



L'impresa sceglie sempre combinazioni di input tali per cui $x_2 = x_1^2$. Essendo i fattori di produzione costosi, infatti, essa ne impiega il minimo indispensabile per raggiungere ciascun possibile livello di produzione. Se il livello di produzione desiderato è y, l'impresa utilizza pertanto $x_1(y, \mathbf{w}) = y$ unità di input 1 e $x_2(y, \mathbf{w}) = y^2$ unità di input 2. In figura è rappresentato l'isoquanto di livello 2: in questo caso, $x_1^* = 2$ e $x_2^* = 4$. La funzione di costo di lungo periodo, infine, è:

$$c(y, \mathbf{w}) = w_1 x_1(p, \mathbf{w}) + w_2 x_2(p, \mathbf{w}) = w_1 y + w_2 y^2.$$

Sostituendo le domande condizionate dei fattori nell'espressione di $\pi(\cdot)$, il problema di massimizzazione del profitto si può riscrivere come:

$$\max_y \; \pi(y) = py - w_1 y - w_2 y^2.$$

La condizione del prim'ordine, ottenuta derivando rispetto all'output, è:

$$\frac{\partial \pi(y)}{\partial y} = p - w_1 - 2w_2 y = 0,$$

da cui si trova:

$$y(p, \mathbf{w}) = \frac{p - w_1}{2w_2}$$

e dunque:

$$x_1(p, \mathbf{w}) = \frac{p - w_1}{2w_2}; \qquad x_2(p, \mathbf{w}) = \left(\frac{p - w_1}{2w_2}\right)^2.$$

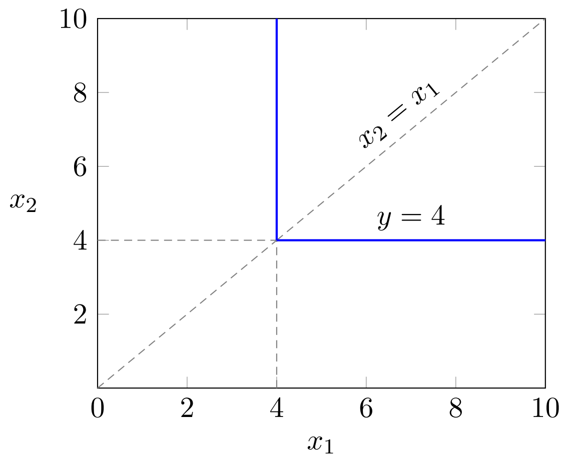
Esercizio 6

Si consideri una funzione di produzione di tipo Leontief, $f(x_1, x_2) = \min\{x_1;\; x_2\}$.

1. Si calcolino le funzioni di domanda condizionata degli input.
2. Si calcoli e si rappresenti graficamente la funzione di costo totale di lungo periodo.
3. Supponendo che, nel breve periodo il livello del secondo input sia fisso e pari a $\overline{x}_2$, si calcoli la funzione di domanda condizionata dell'input 1 di breve periodo.
4. Si calcoli e si rappresenti graficamente la funzione di costo totale di breve periodo.

Il problema di minimizzazione dei costi dell'impresa è:

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \quad & w_1 x_1 + w_2 x_2 \\ \text{s.v.} \quad & \min\{x_1;\; x_2\} \geq y. \end{aligned}$$

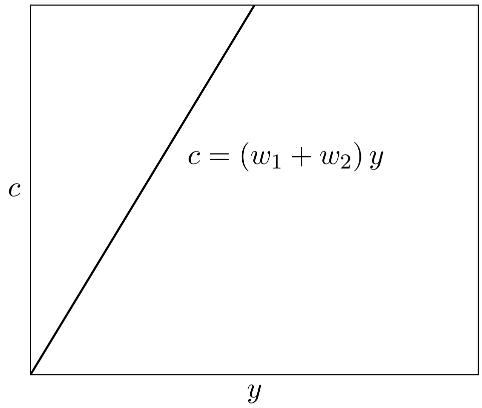


L'impresa sceglie sempre combinazioni di input tali per cui $x_2 = x_1$. Essendo i fattori di produzione costosi, infatti, essa ne impiega il minimo indispensabile per raggiungere ciascun possibile livello di produzione. Se il livello di produzione desiderato è y, l'impresa utilizza pertanto $x_1(y, \mathbf{w}) = y$ unità di input 1 e $x_2(y, \mathbf{w}) = y$ unità di input 2. In figura è rappresentato l'isoquanto di livello 4: in questo caso, $x_1^* = x_2^* = 4$.

La funzione di costo di lungo periodo è:

$$c(y, \mathbf{w}) = w_1 x_1(p, \mathbf{w}) + w_2 x_2(p, \mathbf{w}) = w_1 y + w_2 y = y(w_1 + w_2)$$

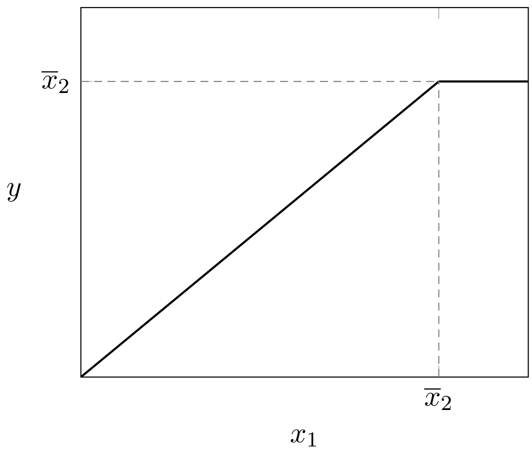
e nello spazio (y, c) corrisponde a una retta crescente passante per l'origine, con pendenza $(w_1 + w_2)$.



Nel breve periodo la quantità dell'input 2 è fissa al livello $x_2 = \overline{x}_2$. La funzione di produzione diviene quindi:

$$f(x_1, \overline{x}_2) = \min\{x_1;\ \overline{x}_2\}.$$

L'impresa può produrre al massimo $\overline{x}_2$ unità di output utilizzando $\overline{x}_2$ unità di input 2 e almeno $\overline{x}_2$ unità di input 1. Per produrre quantità inferiori a $\overline{x}_2$ unità di output, l'impresa utilizzerà invece $x_1 = y < \overline{x}_2$ unità di input 1. Utilizzare un numero di unità di input 1 superiore a $\overline{x}_2$ è possibile, ma (essendo gli input perfetti complementi ed essendo $x_2 = \overline{x}_2$) ciò non permette di aumentare la produzione oltre le $\overline{x}_2$ unità. Per $x_1 > \overline{x}_2$, dunque, l'aumento della quantità di input 1 non corrisponde ad alcun incremento della quantità prodotta.



La funzione del prodotto totale è perciò:

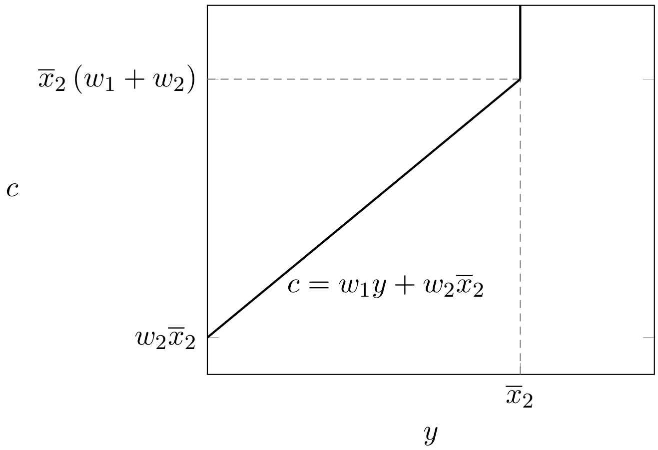
$$y = \begin{cases} x_1 \text{ se } x_1 \leq \overline{x}_2 \\ \overline{x}_2 \text{ se } x_1 > \overline{x}_2, \end{cases}$$

che nello spazio (x_1, y) corrisponde alla retta di equazione $y = x_1$ per valori di x_1 minori o uguali a $\overline{x}_2$, e ad una retta parallela all'asse delle ascisse, di equazione $y = \overline{x}_2$, per valori di x_1 superiori a $\overline{x}_2$.

La funzione di costo di breve periodo, infine, è data da:

$$c_{BP}(y, \mathbf{w}) = \begin{cases} w_1 y + w_2 \overline{x}_2 & \text{se} \quad y < \overline{x}_2 \\ [w_1 \overline{x}_2 + w_2 \overline{x}_2, \ \infty) & \text{se} \quad y = \overline{x}_2, \end{cases}$$

che nello spazio (y, c) corrisponde a una retta crescente (con inclinazione w_1 e intercetta verticale $w_2 \overline{x}_2$) per valori di y inferiori a $\overline{x}_2$ e ad una retta parallela all'asse delle ordinate per $y = \overline{x}_2$.



Esercizio 7

Un'impresa ha una funzione di costo totale di lungo periodo data da:

$$c(y) = \begin{cases} y^2 + 1 & \text{se} \quad y > 0 \\ 0 & \text{se} \quad y = 0. \end{cases}$$

Sia p il prezzo dell'output e siano i prezzi dei fattori dati.

1. Se $p = 2$, quanto produce l'impresa?
2. Se $p = 1$, quanto produce l'impresa?
3. Qual è la funzione di profitto $\pi(p)$ dell'impresa?

Per $p = 2$, il problema di massimizzazione del profitto dell'impresa è:

$$\max_y \pi(y) = 2y - y^2 - 1$$

e la relativa condizione del prim'ordine è $\frac{\partial \pi(y)}{\partial y} = 2 - 2y = 0$, da cui si trova:

$$y = 1.$$

In corrispondenza di questo livello di produzione, i profitti sono:

$$\pi(1) = 2 \times 1 - 1^2 - 1 = 0.$$

Per $p = 1$ si ha invece:

$$\max_y \pi(y) = y - y^2 - 1$$

e la condizione del prim'ordine diviene $\frac{\partial \pi(y)}{\partial y} = 1 - 2y = 0$, da cui si ricava:

$$y = \frac{1}{2}.$$

In corrispondenza di questo livello di produzione, i profitti sono:

$$\pi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{4}$$

e sono dunque negativi. Per questo, quando $p = 1$, la scelta ottimale dell'impresa è quella di non produrre nulla.

Per un generico prezzo p, il problema di massimizzazione del profitto è:

$$\max_y \pi(y) = py - y^2 - 1$$

e la condizione del prim'ordine è $\frac{\partial \pi(y)}{\partial y} = p - 2y = 0$, da cui si trova:

$$y(p) = \frac{p}{2}.$$

Sostituendo $y = p/2$ nella funzione di profitto si ottiene:

$$\pi\left(\frac{p}{2}\right) = p\left(\frac{p}{2}\right) - \left(\frac{p}{2}\right)^2 - 1 = \frac{p^2}{2} - \frac{p^2}{4} - 1 = \frac{p^2}{4} - 1,$$

che è maggiore di zero per valori di p superiori a 2. La funzione di profitto è quindi:

$$\pi(p) = \max\left\{\frac{p^2}{4} - 1;\ 0\right\} = \begin{cases} \frac{p^2}{4} - 1 & \forall\, p > 2 \\ 0 & \forall\, p \leq 2. \end{cases}$$

In corrispondenza di livelli del prezzo inferiori a 2, infatti, i profitti sarebbero negativi e la scelta ottimale dell'impresa diviene quella di produrre $y = 0$ realizzando un profitto nullo.