Microeconomia – a.a. 2017/2018

Corso di Laurea Magistrale in Economia e Politica Economica

Nicola Campigotto · nicola.campigotto2<at>unibo.it

Esercitazione 4 – 6 novembre 2017

Esercizio 1

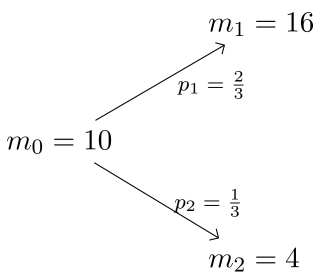
Si consideri la funzione di utilità attesa VNM $u(m) = \sqrt{m}$.

1. Qual è l'atteggiamento del consumatore nei confronti del rischio?
2. Sia $m_0 = 10$ il livello di ricchezza iniziale del consumatore. Si consideri una lotteria che con probabilità $2/3$ fa vincere 6 e con probabilità $1/3$ fa perdere 6. Si fornisca una rappresentazione grafica. Il consumatore accetta la lotteria?
3. Si calcoli l'equivalente certo della lotteria.
4. Si determini il premio per il rischio.

La funzione di utilità attesa riflette avversione al rischio, essendo crescente e strettamente concava in m:

$$\frac{\partial u(m)}{\partial m} = \frac{1}{2\sqrt{m}} > 0; \qquad \frac{\partial u^2(m)}{\partial m^2} = -\frac{1}{4\sqrt{m^3}} < 0.$$

La lotteria che viene proposta al consumatore è $L = \left[\frac{2}{3} \circ 16 \oplus \frac{1}{3} \circ 4\right]$, ossia:



Il consumatore deciderà di accettare la lotteria se $u(L) \geq u(m_0)$. In questo caso, poiché

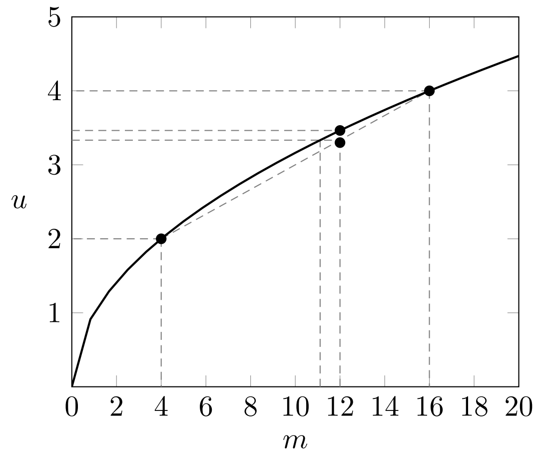
$$u(m_0) = \sqrt{10} \approx 3,162$$

e

$$u(L) = p_1 u(m_1) + p_2 u(m_2) = \frac{2}{3}\sqrt{16} + \frac{1}{3}\sqrt{4} = \frac{8}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \approx 3,333,$$

la lotteria viene accettata nonostante il consumatore sia avverso al rischio. Si può inoltre verificare che, poiché la funzione VNM denota avversione verso il rischio, l'utilità del valore atteso della lotteria $u(\mathbb{E}(L))$ è maggiore dell'utilità attesa $u(L)$:

$$u(\mathbb{E}(L)) = u(p_1 m_1 + p_2 m_2) = \sqrt{\frac{2}{3} \times 16 + \frac{1}{3} \times 4} = 2\sqrt{3} \approx 3,464 > \frac{10}{3}.$$



L'equivalente certo della lotteria è quell'ammontare di denaro EC tale da rendere il consumatore indifferente tra accettare EC e accettare la lotteria. Si deve quindi avere:

$$u(EC) = u(L),$$

ossia:

$$\sqrt{EC} = \frac{10}{3},$$

da cui si trova:

$$EC = \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{100}{9} \approx 11,111.$$

Si noti che, essendo il consumatore avverso al rischio, l'equivalente certo è minore del valore atteso della lotteria:

$$EC = \frac{100}{9} < 12 = \mathbb{E}(L).$$

Il premio al rischio, infine, è quell'ammontare P che il consumatore è disposto a pagare per evitare la lotteria. Esso soddisfa l'eguaglianza $u(L) = u(\mathbb{E}(L) - P)$ ed è pari a:

$$P = \mathbb{E}(L) - EC = 12 - \frac{100}{9} = \frac{8}{9} \approx 0,888.$$

Esercizio 2

Si consideri un individuo la cui utilità VNM è data da $u(m) = m^{\frac{1}{2}}$, dove m rappresenta la ricchezza. L'individuo possiede una ricchezza iniziale pari a $m_0 = 4$ e ha un biglietto della lotteria che con probabilità $\frac{1}{2}$ gli fa vincere 12 e con probabilità $\frac{1}{2}$ non gli fa vincere nulla.

1. Si rappresenti graficamente la funzione di utilità attesa. Qual è l'atteggiamento dell'individuo nei confronti del rischio? Perché?

2. Si calcoli il valore atteso della lotteria.

3. Qual è il prezzo più basso al quale l'individuo sarebbe disposto a cedere il biglietto della lotteria? Si fornisca una rappresentazione grafica utilizzando il grafico precedente.

La funzione di utilità attesa è la stessa vista nel precedente esercizio: l'individuo è dunque avverso al rischio. La lotteria che egli fronteggia è $L = \left[\frac{1}{2} \circ 16 \oplus \frac{1}{2} \circ 4\right]$, il cui valore atteso è:

$$\mathbb{E}\left(L\right) = p_1 m_1 + p_2 m_2 = \frac{1}{2} \times 16 + \frac{1}{2} \times 4 = 10.$$

Si può quindi verificare che $u\left(\mathbb{E}\left(L\right)\right) > u\left(L\right)$:

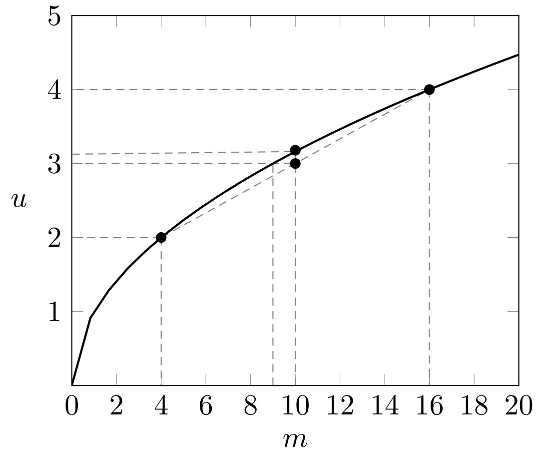
$$u\left(\mathbb{E}\left(L\right)\right) = \sqrt{10} \approx 3,162; \qquad u\left(L\right) = \frac{\sqrt{16}}{2} + \frac{\sqrt{4}}{2} = 2 + 1 = 3.$$

L'equivalente certo è tale per cui $u\left(EC\right) = u\left(L\right)$:

$$\sqrt{EC} = 3 \Rightarrow EC = 9.$$

Il prezzo al quale l'individuo sarebbe disposto a cedere la lotteria è quindi:

$$P = \mathbb{E}\left(L\right) - EC = 1.$$



Esercizio 3

Si consideri la funzione di utilità attesa VNM $u\left(m\right) = am^2 + bm + c$.

1. Quali restrizioni sui parametri a, b e c è necessario imporre affinché la funzioni mostri avversione al rischio?

2. Su quale intervallo di ricchezza può essere definita una funzione di utilità attesa VNM quadratica?

3. Sia m la ricchezza iniziale del consumatore e si consideri una lotteria che con probabilità $\frac{1}{2}$ fa vincere h e con probabilità $\frac{1}{2}$ fa perdere h. Si mostri che l'equivalente certo è inferiore al valore atteso della lotteria e che il premio per il rischio è positivo.

4. Si mostri che questa funzione di utilità attesa, quando soddisfa le restrizioni del punto 1, non può mostrare avversione al rischio assoluta decrescente.

La funzione di utilità attesa $u\left(m\right) = am^2 + bm + c$ corrisponde a una parabola con vertice $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$, intercetta verticale c e radici $m_{1,2} = -\frac{b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Affinché l'individuo sia avverso al rischio, la funzione deve essere crescente e concava. Occorre perciò avere:

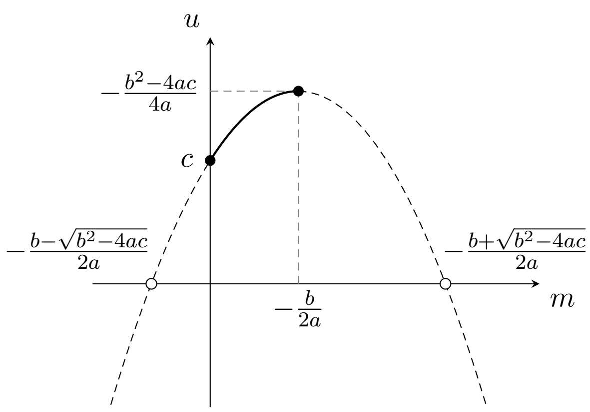
$$\begin{aligned} u(m) > 0: &\qquad am^2 + bm + c > 0 \Rightarrow c > -am^2 - bm; \\ \frac{\partial u(m)}{\partial m} > 0: &\qquad 2am + b > 0 \Rightarrow b > -2am; \\ \frac{\partial u^2(m)}{\partial m^2} < 0: &\qquad 2a < 0 \Rightarrow a < 0. \end{aligned}$$

L'equazione, inoltre, ammette due soluzioni reali distinte se e solo se il discriminante è positivo:

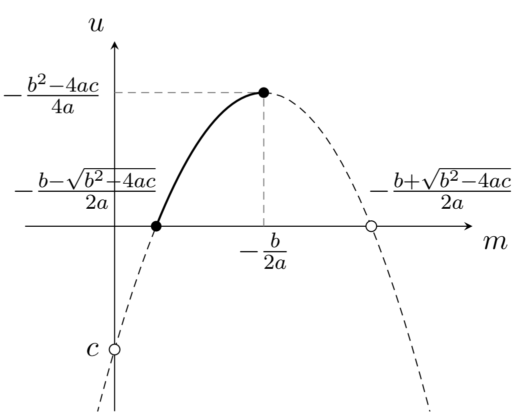
$$b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow c < \frac{b^2}{4a}.$$

(Il caso di una sola soluzione reale non può verificarsi: se l'eguaglianza $b^2 - 4ac = 0$ fosse soddisfatta, infatti, la parabola tangerebbe l'asse delle ascisse in corrispondenza del vertice e si avrebbe $u(x) \leq 0$ per ogni m.) L'intervallo di m su cui la funzione è definita, infine, dipende dal segno di c:

- Se $c \geq 0$, $m \in \left[0; -\frac{b}{2a}\right]$.



- Se $c < 0$, $m \in \left[-\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}; -\frac{b}{2a}\right]$.



Si denoti con m_0 la ricchezza iniziale del consumatore. La lotteria che egli si trova ad affrontare è:

$$L = \left[\frac{1}{2} \circ (m_0 + h) \oplus \frac{1}{2} \circ (m_0 - h)\right],$$

il cui valore atteso è:

$$\mathbb{E}(L) = \frac{m_0 + h}{2} + \frac{m_0 - h}{2} = m_0.$$

L'utilità attesa della lotteria è invece:

$$\begin{aligned}
u(L) &= \frac{1}{2}u(m_0 + h) + \frac{1}{2}u(m_0 - h) \\
&= \frac{1}{2}\left[a(m_0 + h)^2 + b(m_0 + h) + c\right] + \frac{1}{2}\left[a(m_0 - h)^2 + b(m_0 - h) + c\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[a\left(m_0^2 + h^2 + 2hm_0\right) + b(m_0 + h) + c\right] + \frac{1}{2}\left[a\left(m_0^2 + h^2 - 2hm_0\right) + b(m_0 - h) + c\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(am_0^2 + ah^2 + 2ahm_0 + bm_0 + bh + c\right) + \left(am_0^2 + ah^2 - 2ahm_0 + bm_0 - bh + c\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2am_0^2 + 2ah^2 + 2bm_0 + 2c\right] \\
&= am_0^2 + bm_0 + c + ah^2 \\
&= u(m_0) + ah^2.
\end{aligned}$$

Poiché la funzione di VNM è monotona crescente, e poiché $\mathbb{E}(L) = m_0$, si ha che:

$$u(\mathbb{E}(L)) = u(m_0),$$

da cui si ottiene:

$$u(L) = u(\mathbb{E}(L)) + ah^2.$$

Essendo il consumatore avverso al rischio, si ha inoltre:

$$u(\mathbb{E}(L)) > u(L) = u(EC),$$

e poiché la funzione di VNM è strettamente monotona, questo implica che:

$$EC < \mathbb{E}(L).$$

L'indice di avversione assoluta al rischio di Arrow-Pratt è:

$$R(m) := -\frac{\partial u^2(m)/\partial m^2}{\partial u(m)/\partial m} = -\frac{2a}{2am + b},$$

la cui derivata parziale rispetto a m è:

$$\frac{\partial R(m)}{\partial m} = \frac{4a^2}{(2am + b)^2} > 0.$$

La funzione di utilità attesa è quindi IARA.

Esercizio 4

Si consideri un individuo neutrale nei confronti del rischio, caratterizzato da una funzione di utilità attesa $u(m) = m$, che ha una ricchezza iniziale pari a m e che fronteggia la seguente situazione rischiosa. Con probabilità p incorre in un incidente d'auto. L'individuo può influenzare questa probabilità guidando con prudenza, ma ciò ha un costo. Sia il costo di avere una probabilità di sinistro pari a p dato dalla funzione $C(p) = B(1-p)^2$, dove $B > 0$. Il costo $C(p)$ viene sostenuto indipendentemente dall'evento che si realizza. Se si verifica un incidente, l'individuo va incontro ad una perdita monetaria di L, dove $0 < L < 2B$.

1. Se l'individuo non ha la possibilità di assicurarsi, quale probabilità p sceglie per massimizzare la propria utilità attesa?

2. Si supponga ora che l'individuo possa assicurarsi pagando un premio ρ che gli garantisce copertura completa, ovvero il rimborso di L nel caso si verifichi l'incidente. Se l'individuo ha già acquistato l'assicurazione, qual è la scelta ottimale di p?

3. Anticipando la risposta al punto precedente, qual è il premio ρ che l'assicurazione deve richiedere per fare profitti attesi nulli?

Il problema di un individuo che non ha la possibilità di assicurarsi è:

$$\max_p \quad p(m-L) + (1-p)m - B(1-p)^2,$$

che si può riscrivere come:

$$\max_p \quad m - B - Bp^2 + p(2B - L).$$

La condizione del prim'ordine per la massimizzazione dell'utilità attesa è quindi:

$$-2Bp + 2B - L = 0,$$

da cui si trova:

$$p^* = \frac{2B - L}{2B} = 1 - \frac{L}{2B} \in (0,1).$$

Se l'individuo può assicurarsi, pagando un premio ρ che gli garantisce copertura completa in caso di sinistro, il problema diventa:

$$\max_p \quad p(m-\rho) + (1-p)(m-\rho) - B(1-p)^2,$$

che si può riscrivere come:

$$\max_p \quad m - \rho - B - Bp^2 + 2Bp.$$

La condizione del prim'ordine diviene quindi:

$$-2Bp + 2B = 0,$$

da cui si trova:

$$p^{**} = \frac{2B}{2B} = 1.$$

Potendo assicurarsi, l'individuo ha dunque un incentivo a minimizzare il costo derivante dal guidare con prudenza.

Il profitto atteso della compagnia assicurativa, infine, è:

$$p\,(\rho - L) + (1 - p)\,\rho,$$

che si riduce a $\rho - L$ nel caso in cui la compagnia anticipi il comportamento dell'assicurato (ossia $p^{**} = 1$). Il profitto atteso è quindi nullo quando il premio è:

$$\rho = L.$$

Esercizio 5

Si consideri un individuo avverso al rischio che può acquistare due attività finanziarie. La prima è prima di rischio e paga 1 euro. La seconda paga un ammontare a con probabilità π e un ammontare b con probabilità $1 - \pi$. Si denotino le domande delle due attività con (x_1, x_2). Si supponga che la ricchezza iniziale dell'individuo sia 1 e che i prezzi delle due attività siano 1. Il vincolo di bilancio dell'individuo è quindi:

$$x_1 + x_1 = 1 \quad \text{con } x_1, x_2 \in [0, 1]\,.$$

1. Si trovi una condizione necessaria semplice (riguardante solo a e b) affinché la domanda dell'attività priva di rischio sia strettamente positiva.

2. Si trovi una condizione necessaria semplice (riguardante solo a, b e π) affinché la domanda dell'attività rischiosa sia strettamente positiva.

3. Si descrivano le condizioni del primo ordine per questo problema di massimizzazione dell'utilità attesa.

4. Si supponga che $a < 1$. Si mostri, analizzando le condizioni del primo ordine, che $\mathrm{d}x_1/\mathrm{d}a \leq 0$.

5. Si consideri il segno di $\mathrm{d}x_1/\mathrm{d}\pi$. Quale potrebbe essere (sempre analizzando le condizioni del primo ordine)?

Se la diseguaglianza $\min\{a, b\} \geq 1$ fosse verificata, l'attività rischiosa renderebbe almeno tanto quanto quella *risk-free* in uno dei due stati e più di quella *risk-free* nell'altro stato. Il consumatore, in questo caso, preferirebbe sempre l'*asset* rischioso. Una condizione necessaria affinché la domanda dell'attività priva di rischio sia strettamente positiva è quindi:

$$\min\{a, b\} < 1.$$

Se il rendimento atteso dell'*asset* rischioso fosse $\pi a + (1 - \pi)\,b \leq 1$, al contrario, il consumatore preferirebbe sempre l'investimento *risk-free* — il cui rendimento, pari a 1, non sarebbe mai inferiore a quello relativo all'attività rischiosa. Una condizione necessaria affinché la domanda dell'*asset* rischioso sia strettamente positiva è perciò:

$$\pi a + (1 - \pi)\,b > 1.$$

Se entrambe le attività sono domandate in quantità positive, il problema del consumatore è:

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} \quad & \pi u\,(x_1 + a x_2) + (1 - \pi)\,u\,(x_1 + b x_2) \\ \text{s.v.} \quad & x_1 + x_2 = 1 \end{aligned}$$

e le condizioni del prim'ordine, ottenute derivando la funzione lagrangiana rispetto a x_1 e x_2, sono, rispettivamente,

$$\pi u'(x_1 + ax_2) + (1-\pi)\, u'(x_1 + bx_2) - \lambda = 0$$

e

$$\pi u'(x_1 + ax_2)\, a + (1-\pi)\, u'(x_1 + bx_2)\, b - \lambda = 0.$$

Eguagliando le due espressioni si ha quindi:

$$(1-a)\,\pi u'(x_1 + ax_2) + (1-b)\,(1-\pi)\, u'(x_1 + bx_2) = 0,$$

che, insieme a $x_1 + x_2 = 1$, rappresenta la condizione che identifica implicitamente le funzioni di domanda per le due attività.

Ipotizzando che (i) il rendimento dell'attività rischiosa sia pari ad a nello scenario più sfavorevole e a b in quello più favorevole, e che (ii) le quantità domandate delle due attività siano strettamente positive, si avrà che $a < 1 < b$. Sostituendo $x_2 = 1 - x_1$ nell'espressione ricavata sopra, si definisca:

$$\phi(x_1, a, b, \pi) = (1-a)\,\pi u'(x_1 + a(1-x_1)) + (1-b)\,(1-\pi)\, u'(x_1 + b(1-x_1)).$$

Le derivate parziali di $\phi(\cdot)$ rispetto ad a e x_1 — il cui segno dipende dal fatto che, essendo il consumatore avverso al rischio, $u'(\cdot) > 0$ e $u''(\cdot) < 0$ — sono:

$$\frac{\partial\phi(\cdot)}{\partial a} = \underbrace{\underbrace{-\pi}_{<0}\,\underbrace{u'(x_1 + a(1-x_1))}_{>0}}_{<0} + \underbrace{\underbrace{\pi}_{>0}\,\underbrace{(1-a)}_{>0}\,\underbrace{u''(x_1 + a(1-x_1))}_{<0}\,\underbrace{(1-x_1)}_{>0}}_{<0} < 0,$$

$$\frac{\partial\phi(\cdot)}{\partial x_1} = \underbrace{\underbrace{\pi}_{>0}\,\underbrace{(1-a)^2}_{>0}\,\underbrace{u''(x_1 + a(1-x_1))}_{<0}}_{<0} + \underbrace{\underbrace{(1-\pi)}_{>0}\,\underbrace{(1-b)^2}_{>0}\,\underbrace{u''(x_1 + b(1-x_1))}_{<0}}_{<0} < 0.$$

Applicando il teorema della funzione implicita si ha perciò:

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}a} = -\frac{\partial\phi(\cdot)/\partial a}{\partial\phi(\cdot)/\partial x_1} < 0.$$

Si può infine verificare che, se $a < 1 < b$,

$$\frac{\partial\phi(\cdot)}{\partial\pi} = \underbrace{\underbrace{(1-a)}_{>0}\,\underbrace{u'(x_1 + a(1-x_1))}_{>0}}_{>0} - \underbrace{\underbrace{(1-b)}_{<0}\,\underbrace{u'(x_1 + b(1-x_1))}_{>0}}_{<0} > 0$$

e che dunque:

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\pi} = -\frac{\partial\phi(\cdot)/\partial\pi}{\partial\phi(\cdot)/\partial x_1} > 0.$$