# Microeconomia – a.a. 2017/2018

**Corso di Laurea Magistrale in Economia e Politica Economica**

Nicola Campigotto · nicola.campigotto2<at>unibo.it

Esercitazione 3 – 19 ottobre 2017

**Esercizio 1**

Si consideri una funzione di utilità del tipo $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$ e si verifichi l'equazione di Slutsky per l'effetto di una variazione del prezzo $p_1$ sulla domanda del bene 1.

Le funzioni di domanda marshalliane si trovano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m. \end{cases}$$

Sostituendo $x_1 = x_2$ nel vincolo, si ottiene:

$$x_1 (p_1 + p_2) = m$$

e le marshalliane sono dunque:

$$x_1^* (\mathbf{p}, m) = x_2^* (\mathbf{p}, m) = \frac{m}{p_1 + p_2}.$$

Sostituendo in $u(\cdot)$ si trova quindi la funzione di utilità indiretta:

$$v(\mathbf{p}, m) = u(x_1^*(\mathbf{p}, m), x_2^*(\mathbf{p}, m)) = \frac{m}{p_1 + p_2},$$

da cui si trova la funzione di spesa:

$$u = \frac{e(\mathbf{p}, u)}{p_1 + p_2} \Rightarrow e(\mathbf{p}, u) = u(p_1 + p_2).$$

Applicando il Lemma di Shephard si trova che $\frac{\partial(\cdot)}{\partial p_1} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial p_2} = u$. Le funzioni di domanda hicksiane sono perciò:

$$h_1^*(u) = h_2^*(u) = u.$$

L'equazione di Slutsky relativa all'effetto di una variazione di $p_1$ sulla domanda del bene 1 è $\frac{\partial h_1(\mathbf{p},u)}{\partial p_1} = \frac{\partial x_1(\mathbf{p},m)}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1(\mathbf{p},w)}{\partial w} x_1(\mathbf{p}, w)$, dove:

$$\frac{\partial h_1(\cdot)}{\partial p_1} = 0, \qquad \frac{\partial x_1(\cdot)}{\partial p_1} = -\frac{m}{(p_1 + p_2)^2},$$

$$\frac{\partial x_1(\cdot)}{\partial w} = \frac{1}{p_1 + p_2} \Rightarrow \frac{\partial x_1(\cdot)}{\partial w} x_1(\cdot) = \frac{m}{(p_1 + p_2)^2}.$$

**Esercizio 2**

Sia la funzione di spesa di un consumatore

$$e\left(p_1, p_2, u\right) = \frac{up_1p_2}{2p_1 + p_2}.$$

1. Si ricavino le domande hicksiane dei due beni.
2. Si ricavino le domande walrasiane per i due beni.
3. Si verifichi l'equazione di Slutsky considerando soltanto l'effetto della variazione di $p_1$ sulla quantità domandata del bene 1.

Le funzioni di domanda hicksiane sono ottenute applicando il Lemma di Shephard:

$$\frac{\partial e\left(\cdot\right)}{\partial p_1} = h_1^*(\mathbf{p}, u) = \frac{up_2\left(2p_1 + p_2\right) - 2up_1p_2}{\left(2p_1 + p_2\right)^2} = \frac{up_2^2}{\left(2p_1 + p_2\right)^2},$$

$$\frac{\partial e\left(\cdot\right)}{\partial p_2} = h_2^*(\mathbf{p}, u) = \frac{up_1\left(2p_1 + p_2\right) - up_1p_2}{\left(2p_1 + p_2\right)^2} = \frac{2up_1^2}{\left(2p_1 + p_2\right)^2},$$

mentre la funzione di utilità indiretta è:

$$m = \frac{v\left(\mathbf{p}, m\right)p_1p_2}{2p_1 + p_2} \Rightarrow v\left(\mathbf{p}, m\right) = \frac{m\left(2p_1 + p_2\right)}{p_1p_2}.$$

Sostituendo $v\left(\mathbf{p}, m\right)$ in $h_1^*\left(\cdot\right)$ e $h_2^*\left(\cdot\right)$ si ottengono le funzioni marshalliane:

$$\begin{aligned} h_1^*\left(\mathbf{p}, v\left(\mathbf{p}, m\right)\right) &= \frac{m\left(2p_1 + p_2\right)}{p_1p_2}\frac{p_2^2}{\left(2p_1 + p_2\right)^2} \\ &= \frac{mp_2}{p_1\left(2p_1 + p_2\right)} = x_1^*\left(\mathbf{p}, m\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2^*\left(\mathbf{p}, v\left(\mathbf{p}, m\right)\right) &= \frac{m\left(2p_1 + p_2\right)}{p_1p_2}\frac{2p_1^2}{\left(2p_1 + p_2\right)^2} \\ &= \frac{2mp_1}{p_2\left(2p_1 + p_2\right)} = x_1^*\left(\mathbf{p}, m\right). \end{aligned}$$

L'equazione di Slutsky relativa all'effetto di una variazione di $p_1$ sulla domanda del bene 1 è $\frac{\partial h_1(\mathbf{p},u)}{\partial p_1} = \frac{\partial x_1(\mathbf{p},m)}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1(\mathbf{p},w)}{\partial w}x_1(\mathbf{p}, w)$. Il secondo termine dell'equazione è:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1\left(\cdot\right)}{\partial p_1} &= mp_2\left[-p_1^{-2}\left(2p_1 + p_2\right)^{-1} - 2p_1^{-1}\left(2p_1 + p_2\right)^{-2}\right] \\ &= -mp_2\left[\frac{1}{p_1^2\left(2p_1 + p_2\right)} + \frac{2}{p_1\left(2p_1 + p_2\right)^2}\right] \\ &= -mp_2\left[\frac{2p_1 + p_2 + 2p_1}{p_1^2\left(2p_1 + p_2\right)^2}\right] = -\frac{mp_2\left(4p_1 + p_2\right)}{p_1^2\left(2p_1 + p_2\right)^2}, \end{aligned}$$

mentre il terzo termine è:

$$\frac{\partial x_1(\cdot)}{\partial m}x_1(\cdot) = \left[\frac{p_2}{p_1\left(2p_1 + p_2\right)}\right]\frac{mp_2}{p_1\left(2p_1 + p_2\right)} = \frac{mp_2^2}{p_1^2\left(2p_1 + p_2\right)^2}$$

e dunque:

$$\frac{\partial x_1(\cdot)}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1(\cdot)}{\partial w} x_1(\cdot) = -\frac{mp_2(4p_1+p_2)}{p_1^2(2p_1+p_2)^2} + \frac{mp_2^2}{p_1^2(2p_1+p_2)^2}$$
$$= \frac{mp_2^2 - mp_2^2 - 4mp_1p_2}{p_1^2(2p_1+p_2)^2} = -\frac{4mp_2}{p_1(2p_1+p_2)^2}.$$

Il primo termine dell'equazione, infine, è:

$$\frac{\partial h_1(\cdot)}{\partial p_1} = -\frac{4up_2^2}{(2p_1+p_2)^3},$$

che, posto $u = v(\mathbf{p}, m)$, diviene:

$$\frac{\partial h_1(\cdot)}{\partial p_1} = -\frac{4p_2^2}{(2p_1+p_2)^3}\left[\frac{m(2p_1+p_2)}{p_1p_2}\right] = -\frac{4mp_2}{p_1(2p_1+p_2)^2}.$$

**Esercizio 3**

Si considerino due soli beni e una funzione di domanda walrasiana data da:

$$x_i(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1+p_2}, \quad i = 1, 2.$$

1. Verificare se queste funzioni di domanda sono omogenee di grado zero e soddisfano la legge di Walras.
2. Queste funzioni di domanda soddisfano il WARP? Spiegare.
3. Si calcoli la matrice di sostituzione di Slutsky. Quali caratteristiche ha?

Le funzioni di domanda – che corrispondono al caso dei beni perfetti complementi – sono omogenee di grado zero in $(\mathbf{p}, m)$:

$$x_i(\alpha\mathbf{p}, \alpha m) = \frac{\alpha m}{\alpha p_1 + \alpha p_2} = \frac{\alpha m}{\alpha(p_1+p_2)} = \frac{m}{p_1+p_2} = x_i(\mathbf{p}, m).$$

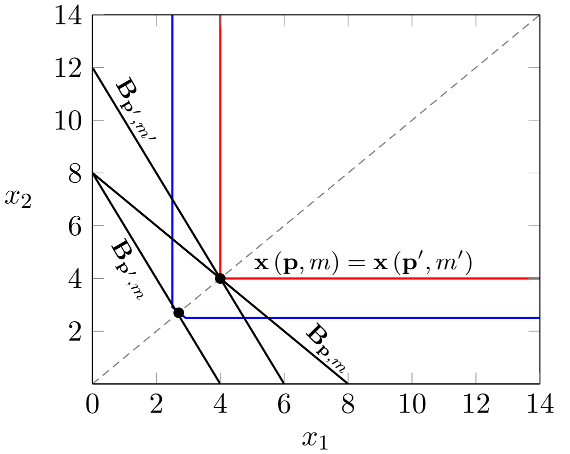
Anche la legge di Walras è soddisfatta:

$$p_1 \underbrace{\frac{m}{p_1+p_2}}_{x_1(\cdot)} + p_2 \underbrace{\frac{m}{p_1+p_2}}_{x_2(\cdot)} = \frac{m(p_1+p_2)}{p_1+p_2} = m.$$

La validità del WARP segue dal fatto che: (i) la domanda è omogenea di grado zero e soddisfa la legge di Walras; (ii) la legge della domanda compensata è soddisfatta con uguaglianza, ossia, per ogni variazione compensata nei prezzi da una situazione iniziale $(\mathbf{p}, m)$ ad una nuova situazione $(\mathbf{p}', m') = (\mathbf{p}', \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}(\mathbf{p}, m))$, si ha:

$$(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \left[\mathbf{x}(\mathbf{p}', m') - \mathbf{x}(\mathbf{p}, m)\right] = 0.$$

Questo risultato è legato al fatto che, nel caso di beni perfetti complementi, l'effetto sostituzione è sempre nullo. A fronte di una compensazione *à la* Slutsky, infatti, il consumatore continua ad acquistare il paniere originale: $\mathbf{x}(\mathbf{p}, m) = \mathbf{x}(\mathbf{p}', m')$, dove $m' = \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}(\mathbf{p}, m)$. Nella figura è rappresentato l'effetto di un aumento del prezzo del bene 1 cui segue una compensazione *à la* Slutsky della ricchezza.




La matrice di sostituzione di Slutsky, infine, è:

$$\begin{bmatrix} s_{11}(\mathbf{p},m) & s_{12}(\mathbf{p},m) \\ s_{21}(\mathbf{p},m) & s_{22}(\mathbf{p},m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(\cdot)}{\partial p_1} & \frac{\partial x_1(\cdot)}{\partial p_2} \\ \frac{\partial x_2(\cdot)}{\partial p_1} & \frac{\partial x_2(\cdot)}{\partial p_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(\cdot)}{\partial m} x_1(\cdot) & \frac{\partial x_1(\cdot)}{\partial m} x_2(\cdot) \\ \frac{\partial x_2(\cdot)}{\partial m} x_1(\cdot) & \frac{\partial x_2(\cdot)}{\partial m} x_2(\cdot) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

come si può verificare calcolando:

$$\frac{\partial x_l(\mathbf{p},m)}{\partial p_k} = -\frac{m}{(p_1+p_2)^2}; \qquad \frac{\partial x_l(\mathbf{p},m)}{\partial m} x_k(\mathbf{p},m) = \left(\frac{1}{p_1+p_2}\right)\frac{m}{p_1+p_2}.$$

**Esercizio 4**

Sia $K = 3$ e si considerino gli insiemi di bilancio determinati da una ricchezza pari a $m = 8$ e dai vettori di prezzo $\mathbf{p}^1 = (2,1,2)$, $\mathbf{p}^2 = (2,2,1)$ e $\mathbf{p}^3 = (1,2,2)$. Le rispettive e uniche scelte di consumo sono $\mathbf{x}^1 = (1,2,2)$, $\mathbf{x}^2 = (2,1,2)$ e $\mathbf{x}^3 = (2,2,1)$.

1. Si verifichi la legge di Walras.
2. Si considerino le scelte $\mathbf{x}^1$ e $\mathbf{x}^2$: vale il Warp? C'è un paniere che si rivela preferito all'altro?
3. Si considerino le scelte $\mathbf{x}^2$ e $\mathbf{x}^3$: vale il Warp? C'è un paniere che si rivela preferito all'altro?
4. Si considerino le scelte $\mathbf{x}^1$ e $\mathbf{x}^3$: vale il Warp? C'è un paniere che si rivela preferito all'altro?
5. Può esistere una relazione di preferenza razionale compatibile con queste scelte?

La legge di Walras è soddisfatta, essendo:

$$\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^1 = 2\times 1 + 1\times 2 + 2\times 2 = 8 = m;$$

$$\mathbf{p}^2 \cdot \mathbf{x}^2 = 2\times 2 + 2\times 1 + 1\times 2 = 8 = m;$$

$$\mathbf{p}^3 \cdot \mathbf{x}^3 = 1\times 2 + 2\times 2 + 2\times 1 = 8 = m.$$

Valutare la validità del WARP richiede di verificare quali panieri sono acquistabili per ciascun vettore dei prezzi.

- Considerando il vettore $\mathbf{p}^1$, si hanno:

  $$\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^1 = 8; \quad \mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^2 = 2 \times 2 + 1 \times 1 + 2 \times 2 = 9; \quad \mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^3 = 2 \times 2 + 1 \times 2 + 2 \times 1 = 8.$$

  Il consumatore rivela quindi una preferenza per $\mathbf{x}^1$ rispetto a $\mathbf{x}^3$: egli ha infatti acquistato il paniere $\mathbf{x}^1$ quando poteva permettersi anche $\mathbf{x}^3$. Nulla si può dire invece della relazione che intercorre tra $\mathbf{x}^1$ e $\mathbf{x}^2$ (che non è acquistabile ai prezzi $\mathbf{p}^1$).

- Considerando il vettore $\mathbf{p}^2$, si hanno:

  $$\mathbf{p}^2 \cdot \mathbf{x}^1 = 2 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 2 = 8; \quad \mathbf{p}^2 \cdot \mathbf{x}^2 = 8; \quad \mathbf{p}^2 \cdot \mathbf{x}^3 = 2 \times 2 + 2 \times 2 + 1 \times 1 = 9.$$

  Il consumatore rivela una preferenza per $\mathbf{x}^2$ rispetto a $\mathbf{x}^1$. Nulla si può dire invece della relazione che intercorre tra $\mathbf{x}^2$ e $\mathbf{x}^3$.

- Considerando il vettore $\mathbf{p}^3$, si hanno:

  $$\mathbf{p}^3 \cdot \mathbf{x}^1 = 1 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 2 = 9; \quad \mathbf{p}^3 \cdot \mathbf{x}^2 = 1 \times 2 + 2 \times 1 + 2 \times 2 = 8; \quad \mathbf{p}^3 \cdot \mathbf{x}^3 = 8.$$

  Il consumatore rivela una preferenza per $\mathbf{x}^3$ rispetto a $\mathbf{x}^2$. Nulla si può dire invece della relazione che intercorre tra $\mathbf{x}^3$ e $\mathbf{x}^1$.

Poiché $\mathbf{x}^1 \succ^* \mathbf{x}^3$, $\mathbf{x}^2 \succ^* \mathbf{x}^1$ e $\mathbf{x}^3 \succ^* \mathbf{x}^2$, la transitività della relazione di preferenza rivelata $\succ^*$ è violata. Le preferenze rivelate del consumatore non sono dunque razionali.

**Esercizio 5**

Sia $K = 3$ e si considerino le seguenti funzioni di domanda:

$$x_1(\mathbf{p}, m) = \frac{p_2}{p_1 + p_2 + p_3} \frac{m}{p_1}; \quad x_2(\mathbf{p}, m) = \frac{p_3}{p_1 + p_2 + p_3} \frac{m}{p_2}; \quad x_3(\mathbf{p}, m) = \frac{p_1}{p_1 + p_2 + p_3} \frac{m}{p_3}.$$

1. È soddisfatta l'omogeneità di grado zero nei prezzi e nel reddito?
2. È soddisfatta la legge di Walras?
3. Si calcoli la matrice di sostituzione di Slutsky. Quali caratteristiche ha?

L'omogeneità di grado zero in $(\mathbf{p}, m)$ è soddisfatta. Considerando la marshalliana relativa al bene 1, ad esempio, si ha:

$$x_1(\alpha\mathbf{p}, \alpha m) = \frac{\alpha p_2}{\alpha p_1 + \alpha p_2 + \alpha p_3} \frac{\alpha m}{\alpha p_1} = \frac{\alpha^2 p_2 m}{\alpha^2 (p_1 + p_2 + p_3) p_1} = \frac{p_2}{p_1 + p_2 + p_3} \frac{m}{p_1} = x_1(\mathbf{p}, m).$$

Anche la legge di Walras è soddisfatta:

$$p_1 \underbrace{\frac{p_2}{p_1 + p_2 + p_3} \frac{m}{p_1}}_{x_1(\mathbf{p},m)} + p_2 \underbrace{\frac{p_3}{p_1 + p_2 + p_3} \frac{m}{p_2}}_{x_2(\mathbf{p},m)} + p_3 \underbrace{\frac{p_1}{p_1 + p_2 + p_3} \frac{m}{p_3}}_{x_3(\mathbf{p},m)} = \frac{m(p_2 + p_3 + p_1)}{p_1 + p_2 + p_3} = m.$$

La matrice di sostituzione di Slutsky, infine, è ottenuta calcolando:

$$s_{lk}(\mathbf{p}, m) = \frac{\partial x_l(\mathbf{p}, m)}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(\mathbf{p}, m)}{\partial m} x_k(\mathbf{p}, m), \quad l, k = 1, 2, 3.$$

È importante tenere a mente che, poiché $K > 2$, la matrice $\mathbf{S}(\mathbf{p}, m)$ non è necessariamente simmetrica. Occorre pertanto ricavarne tutti gli elementi.

- $s_{11}(\mathbf{p},m)=\frac{-mp_2(2p_1+p_3)}{p_1^2(p_1+p_2+p_3)^2}$, poiché:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1(\mathbf{p},m)}{\partial p_1}=&mp_2\left[-(p_1+p_2+p_3)^{-2}p_1^{-1}-p_1^{-2}(p_1+p_2+p_3)^{-1}\right]\\&=-mp_2\left[\frac{1}{p_1(p_1+p_2+p_3)^2}+\frac{1}{p_1^2(p_1+p_2+p_3)}\right]\\&=-mp_2\left[\frac{p_1+p_1+p_2+p_3}{p_1^2(p_1+p_2+p_3)^2}\right]=-\frac{mp_2(2p_1+p_2+p_3)}{p_1^2(p_1+p_2+p_3)^2}\end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial x_1(\mathbf{p},m)}{\partial m}x_1(\mathbf{p},m)=\left[\frac{p_2}{p_1(p_1+p_2+p_3)}\right]\frac{p_2}{p_1+p_2+p_3}\frac{m}{p_1}=\frac{mp_2^2}{p_1^2(p_1+p_2+p_3)^2}.$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1(\mathbf{p},m)}{\partial p_1}+\frac{\partial x_1(\mathbf{p},m)}{\partial m}x_1(\mathbf{p},m)&=\frac{-2mp_1p_2-mp_2^2-mp_2p_3}{p_1^2(p_1+p_2+p_3)^2}+\frac{mp_2^2}{p_1^2(p_1+p_2+p_3)^2}\\&=\frac{-2mp_1p_2-mp_2p_3}{p_1^2(p_1+p_2+p_3)^2}\\&=\frac{-mp_2(2p_1+p_3)}{p_1^2(p_1+p_2+p_3)^2}=s_{11}(\mathbf{p},m).\end{aligned}$$

- $s_{22}(\mathbf{p},m)=\frac{-mp_3(2p_2+p_1)}{p_2^2(p_1+p_2+p_3)^2}$ per analogia con $s_{11}(\mathbf{p},m)$.

- $s_{33}(\mathbf{p},m)=\frac{-mp_1(2p_3+p_2)}{p_3^2(p_1+p_2+p_3)^2}$ per analogia con $s_{11}(\mathbf{p},m)$.

- $s_{12}(\mathbf{p},m)=\frac{m(p_1+2p_3)}{p_1(p_1+p_2+p_3)^2}$, poiché:

$$\frac{\partial x_1(\mathbf{p},m)}{\partial p_2}=\frac{m}{p_1}\left[\frac{p_1+p_2+p_3-p_2}{(p_1+p_2+p_3)^2}\right]=\frac{m(p_1+p_3)}{p_1(p_1+p_2+p_3)^2}$$

e

$$\frac{\partial x_1(\mathbf{p},m)}{\partial m}x_2(\mathbf{p},m)=\left[\frac{p_2}{p_1(p_1+p_2+p_3)}\right]\frac{p_3}{p_1+p_2+p_3}\frac{m}{p_2}=\frac{mp_2p_3}{p_1p_2(p_1+p_2+p_3)^2}.$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1(\mathbf{p},m)}{\partial p_2}+\frac{\partial x_1(\mathbf{p},m)}{\partial m}x_2(\mathbf{p},m)&=\frac{mp_1+mp_3}{p_1(p_1+p_2+p_3)^2}+\frac{mp_2p_3}{p_1p_2(p_1+p_2+p_3)^2}\\&=\frac{mp_1p_2+mp_2p_3+mp_2p_3}{p_1p_2(p_1+p_2+p_3)^2}=\frac{mp_2(p_1+2p_3)}{p_1p_2(p_1+p_2+p_3)^2}\\&=\frac{m(p_1+2p_3)}{p_1(p_1+p_2+p_3)^2}=s_{12}(\mathbf{p},m).\end{aligned}$$

- $s_{13}(\mathbf{p},m)=\frac{mp_2(p_1-p_3)}{p_1p_3(p_1+p_2+p_3)^2}$, poiché:

$$\frac{\partial x_1(\mathbf{p},m)}{\partial p_3}=-\frac{p_2}{(p_1+p_2+p_3)^2}\frac{m}{p_1}$$

e

$$\frac{\partial x_1(\mathbf{p},m)}{\partial m}x_3(\mathbf{p},m)=\left[\frac{p_2}{p_1(p_1+p_2+p_3)}\right]\frac{p_1}{p_1+p_2+p_3}\frac{m}{p_3}=\frac{mp_2}{p_3(p_1+p_2+p_3)^2}.$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1(\mathbf{p},m)}{\partial p_3}+\frac{\partial x_1(\mathbf{p},m)}{\partial m}x_3(\mathbf{p},m)&-\frac{mp_2}{p_1(p_1+p_2+p_3)^2}+\frac{mp_2}{p_3(p_1+p_2+p_3)^2}\\&=\frac{-mp_2p_3+mp_1p_2}{p_1p_3(p_1+p_2+p_3)^2}\\&=\frac{mp_2(p_1-p_3)}{p_1p_3(p_1+p_2+p_3)^2}=s_{13}(\mathbf{p},m).\end{aligned}$$

- $s_{21}(\mathbf{p},m)=\frac{mp_3(p_2-p_1)}{p_1p_2(p_1+p_2+p_3)^2}$, poiché:

$$\frac{\partial x_2(\mathbf{p},m)}{\partial p_1}=-\frac{p_3}{(p_1+p_2+p_3)^2}\frac{m}{p_2}$$

e

$$\frac{\partial x_2(\mathbf{p},m)}{\partial m}x_1(\mathbf{p},m)=\left[\frac{p_3}{p_2(p_1+p_2+p_3)}\right]\frac{p_2}{p_1+p_2+p_3}\frac{m}{p_1}=\frac{mp_2p_3}{p_1p_2(p_1+p_2+p_3)^2}.$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_2(\mathbf{p},m)}{\partial p_1}+\frac{\partial x_2(\mathbf{p},m)}{\partial m}x_1(\mathbf{p},m)&-\frac{mp_3}{p_2(p_1+p_2+p_3)^2}+\frac{mp_2p_3}{p_1p_2(p_1+p_2+p_3)^2}\\&=\frac{-mp_1p_3+mp_2p_3}{p_1p_2(p_1+p_2+p_3)^2}\\&=\frac{mp_3(p_2-p_1)}{p_1p_2(p_1+p_2+p_3)^2}=s_{21}(\mathbf{p},m).\end{aligned}$$

- $s_{23}(\mathbf{p},m)=\frac{m(2p_1+p_2)}{p_2(p_1+p_2+p_3)^2}$, poiché:

$$\frac{\partial x_2(\mathbf{p},m)}{\partial p_3}=\frac{m}{p_2}\left[\frac{p_1+p_2+p_3-p_3}{(p_1+p_2+p_3)^2}\right]=\frac{m(p_1+p_2)}{p_2(p_1+p_2+p_3)^2}$$

e

$$\frac{\partial x_2(\mathbf{p},m)}{\partial m}x_3(\mathbf{p},m)=\left[\frac{p_3}{p_2(p_1+p_2+p_3)}\right]\frac{p_1}{p_1+p_2+p_3}\frac{m}{p_3}=\frac{mp_1}{p_2(p_1+p_2+p_3)^2}.$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_2(\mathbf{p},m)}{\partial p_3}+\frac{\partial x_2(\mathbf{p},m)}{\partial m}x_3(\mathbf{p},m)&=\frac{mp_1+mp_2}{p_2(p_1+p_2+p_3)^2}+\frac{mp_1}{p_2(p_1+p_2+p_3)^2}\\&=\frac{m(2p_1+p_2)}{p_2(p_1+p_2+p_3)^2}=s_{23}(\mathbf{p},m).\end{aligned}$$

- $s_{31}(\mathbf{p},m)=\frac{m(2p_2+p_3)}{p_3(p_1+p_2+p_3)^2}$, poiché:

$$\frac{\partial x_3(\mathbf{p},m)}{\partial p_1}=\frac{m}{p_3}\left[\frac{p_1+p_2+p_3-p_1}{(p_1+p_2+p_3)^2}\right]=\frac{m(p_2+p_3)}{p_3(p_1+p_2+p_3)^2}$$

e

$$\frac{\partial x_3(\mathbf{p},m)}{\partial m}x_1(\mathbf{p},m)=\left[\frac{p_1}{p_3(p_1+p_2+p_3)}\right]\frac{p_2}{p_1+p_2+p_3}\frac{m}{p_1}=\frac{mp_1p_2}{p_1p_3(p_1+p_2+p_3)^2}.$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_3(\mathbf{p},m)}{\partial p_1}+\frac{\partial x_3(\mathbf{p},m)}{\partial m}x_1(\mathbf{p},m)&=\frac{mp_2+mp_3}{p_3(p_1+p_2+p_3)^2}+\frac{mp_1p_2}{p_1p_3(p_1+p_2+p_3)^2}\\&=\frac{mp_1p_2+mp_1p_3+mp_1p_2}{p_1p_3(p_1+p_2+p_3)^2}=\frac{mp_1(2p_2+p_3)}{p_1p_3(p_1+p_2+p_3)^2}\\&=\frac{m(2p_2+p_3)}{p_3(p_1+p_2+p_3)^2}=s_{31}(\mathbf{p},m).\end{aligned}$$

- $s_{32}(\mathbf{p},m)=\frac{mp_1(p_3-p_2)}{p_2p_3(p_1+p_2+p_3)^2}$, poiché:

$$\frac{\partial x_3(\mathbf{p},m)}{\partial p_2}=-\frac{p_1}{(p_1+p_2+p_3)^2}\frac{m}{p_3}$$

e

$$\frac{\partial x_3(\mathbf{p},m)}{\partial m}x_2(\mathbf{p},m)=\left[\frac{p_1}{p_3(p_1+p_2+p_3)}\right]\frac{p_3}{p_1+p_2+p_3}\frac{m}{p_2}=\frac{mp_1}{p_2(p_1+p_2+p_3)^2}.$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_3(\mathbf{p},m)}{\partial p_2}+\frac{\partial x_3(\mathbf{p},m)}{\partial m}x_2(\mathbf{p},m)&=-\frac{mp_1}{p_3(p_1+p_2+p_3)^2}+\frac{mp_1}{p_2(p_1+p_2+p_3)^2}\\&=\frac{-mp_1p_2+mp_1p_3}{p_2p_3(p_1+p_2+p_3)^2}\\&=\frac{mp_1(p_3-p_2)}{p_2p_3(p_1+p_2+p_3)^2}=s_{32}(\mathbf{p},m).\end{aligned}$$

La matrice di sostituzione di Slutsky è perciò:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\mathbf{p},m)&=\begin{bmatrix}\frac{-mp_2(2p_1+p_3)}{p_1^2(p_1+p_2+p_3)^2}&\frac{m(p_1+2p_3)}{p_1(p_1+p_2+p_3)^2}&\frac{mp_2(p_1-p_3)}{p_1p_3(p_1+p_2+p_3)^2}\\\frac{mp_3(p_2-p_1)}{p_1p_2(p_1+p_2+p_3)^2}&\frac{-mp_3(2p_2+p_1)}{p_2^2(p_1+p_2+p_3)^2}&\frac{m(2p_1+p_2)}{p_2(p_1+p_2+p_3)^2}\\\frac{m(2p_2+p_3)}{p_3(p_1+p_2+p_3)^2}&\frac{mp_1(p_3-p_2)}{p_2p_3(p_1+p_2+p_3)^2}&\frac{-mp_1(2p_3+p_2)}{p_3^2(p_1+p_2+p_3)^2}\end{bmatrix}\\&=\frac{m}{(p_1+p_2+p_3)^2}\begin{bmatrix}-\frac{p_2(2p_1+p_3)}{p_1^2}&\frac{p_1+2p_3}{p_1}&\frac{p_2(p_1-p_3)}{p_1p_3}\\\frac{p_3(p_2-p_1)}{p_1p_2}&-\frac{p_3(2p_2+p_1)}{p_2^2}&\frac{2p_1+p_2}{p_2}\\\frac{2p_2+p_3}{p_3}&\frac{p_1(p_3-p_2)}{p_2p_3}&-\frac{p_1(2p_3+p_2)}{p_3^2}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

e non è simmetrica. Si noti inoltre che tutti gli elementi della diagonale principale sono negativi: l'effetto sostituzione sulla quantità domandata del bene $l$ generato da una variazione di $p_l$ è dunque sempre negativo.

*(opzionale)* Poiché la matrice $\mathbf{S}(\mathbf{p}, m)$ non è simmetrica, studiare la definitezza della forma quadratica $\mathbf{z} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{p}, m)\,\mathbf{z}$ non è banale (non è infatti possibile utilizzare né la segnatura della matrice né il metodo dei minori principali). A questo proposito può essere conveniente sfruttare due risultati:

- (MWG, pag. 939, teorema M.D.4) Sia $\mathbf{M}$ una matrice di dimensione $N \times N$ e sia $\mathbf{p} \gg 0$ un vettore tale per cui $\mathbf{Mp} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{p} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{0}$. Si definisca con $\hat{\mathbf{M}}$ la matrice ottenuta a partire da $\mathbf{M}$ eliminando una riga e la corrispondente colonna. Allora, per ogni $\hat{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^{N-1} \neq \mathbf{0}$ e per ogni $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$ ottenuto a partire da $\hat{\mathbf{z}}$ aggiungendo uno zero nella $N$-esima coordinata, si ha che $\mathbf{z} \cdot \mathbf{Mz} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{z}}$.

- (MWG, pag. 35, teorema 2.F.3) Se la domanda walrasiana $\mathbf{x}(\mathbf{p}, m)$ è differenziabile, omogenea di grado zero e soddisfa la legge di Walras, allora $\mathbf{p} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{p}, m) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{S}(\mathbf{p}, m)\,\mathbf{p} = \mathbf{0}$.

Per verificare se la forma quadratica $\mathbf{z} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{p}, m)\,\mathbf{z}$ è semidefinita negativa *per ogni* combinazione prezzo-quantità $(\mathbf{p}, m)$, si consideri il vettore dei prezzi $\tilde{\mathbf{p}} = (1, 1, p_3)$. La matrice $\mathbf{S}(\cdot)$ si può in questo caso riscrivere come:

$$\mathbf{S}(\tilde{\mathbf{p}}, m) = \frac{m}{(2+p_3)^2} \begin{bmatrix} -2-p_3 & 1+2p_3 & \frac{1-p_3}{p_3} \\ 0 & -3p_3 & 3 \\ \frac{2+p_3}{3} & \frac{p_3-1}{p_3} & \frac{-2p_3-1}{p_3^2} \end{bmatrix}.$$

Si definisca quindi con $\hat{\mathbf{S}}(\tilde{\mathbf{p}}, m)$ la sottomatrice di $\mathbf{S}(\tilde{\mathbf{p}}, m)$ ottenuta eliminando la terza riga e la terza colonna:

$$\hat{\mathbf{S}}(\tilde{\mathbf{p}}, m) = \frac{m}{(2+p_3)^2} \begin{bmatrix} -2-p_3 & 1+2p_3 \\ 0 & -3p_3 \end{bmatrix}.$$

Siano infine $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Poiché l'omogeneità di grado zero delle walrasiane e la legge di Walras sono soddisfatte, si ha che:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{S}(\tilde{\mathbf{p}}, m) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}(\tilde{\mathbf{p}}, m) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

È a questo punto possibile verificare che la forma quadratica

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}(\tilde{\mathbf{p}}, m) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} &= \frac{m}{(2+p_3)^2} \left( \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2-p_3 & 1+2p_3 \\ 0 & -3p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{m}{(2+p_3)^2} \left( \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+5p_3 \\ -9p_3 \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{m}{(2+p_3)^2} (1+5p_3-27p_3) = \frac{m}{(2+p_3)^2} (1-22p_3)
\end{aligned}$$

è maggiore di zero per $p_3 \in \left(0, \frac{1}{22}\right)$. $\mathbf{z} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{p}, m)\,\mathbf{z}$ non è dunque semidefinita negativa per ogni $(\mathbf{p}, m)$ e la funzione di domanda non soddisfa perciò il WARP.

**Esercizio 6**

Siano le funzioni di domanda di un consumatore che consuma tre beni date da:

$$x_1(p_2,p_3)=\frac{p_2}{p_3};\quad x_2(p_1,p_3)=-\frac{p_1}{p_3};\quad x_3(p_3,m)=\frac{m}{p_3}.$$

1. Si mostri che $\mathbf{x}(\mathbf{p},m)$ è omogenea di grado zero nei prezzi e nel reddito del consumatore e che soddisfa la legge di Walras.

2. Si mostri che $\mathbf{x}(\mathbf{p},m)$ viola l'assioma debole delle preferenze rivelate.

L'omogeneità di grado zero in $(\mathbf{p},m)$ è soddisfatta. Si hanno infatti:

$$\begin{aligned}x_1(\alpha p_2,\alpha p_3)&=\frac{\alpha p_2}{\alpha p_3}=\frac{p_2}{p_3}=x_1(p_2,p_3),\\ x_2(\alpha p_1,\alpha p_3)&=-\frac{\alpha p_1}{\alpha p_3}=-\frac{p_1}{p_3}=x_2(p_1,p_3),\\ x_3(\alpha p_3,\alpha m)&=\frac{\alpha m}{\alpha p_3}=\frac{m}{p_3}=x_3(p_3,m).\end{aligned}$$

Anche la legge di Walras è soddisfatta:

$$p_1\underbrace{\frac{p_2}{p_3}}_{x_1(\cdot)}+p_2\underbrace{\left(-\frac{p_1}{p_3}\right)}_{x_2(\cdot)}+p_3\underbrace{\frac{m}{p_3}}_{x_3(\cdot)}=\frac{p_1p_2}{p_3}-\frac{p_1p_2}{p_3}+m=m.$$

Per mostrare che il WARP è violato, si considerino:

$$\mathbf{p}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\quad m=1,\quad \mathbf{p}'=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\quad m'=2.$$

Si hanno allora:

$$\mathbf{x}(\mathbf{p},m)=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{x}(\mathbf{p}',m')=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

ed è possibile verificare che:

$$\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}(\mathbf{p},m)=\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}=1\times2+1\times(-1)+1\times1=2=m',$$

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}(\mathbf{p}',m')=\begin{bmatrix}1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}=1\times1+2\times(-1)+1\times2=1=m.$$

Poiché $\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}(\mathbf{p},m)=2=m'$, il primo paniere è acquistabile ai prezzi del secondo. Ma siccome $\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}(\mathbf{p}',m')=1=m$, il secondo paniere è acquistabile ai prezzi del primo. Il WARP è dunque violato.

*(opzionale)* La matrice di sostituzione di Slutsky è:

$$\mathbf{S}(\mathbf{p},m)=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{p_3}&-\frac{p_2}{p_3^2}\\-\frac{1}{p_3}&0&\frac{p_1}{p_3^2}\\\frac{p_2}{p_3^2}&-\frac{p_1}{p_3^2}&0\end{bmatrix}$$

e non è quindi simmetrica. Per valutare la definitezza della forma quadratica $\mathbf{z} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{p}, m)\,\mathbf{z}$, in questo caso, è conveniente sfruttare il seguente risultato:

- Esistono infinite matrici $\mathbf{M}$ che rappresentano la forma quadratica $Q(\mathbf{z}) = \mathbf{z} \cdot \mathbf{M}\mathbf{z}$ (con $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$) e una di esse è sicuramente simmetrica.

Questa matrice è $\frac{\mathbf{M}+\mathbf{M}^T}{2}$, dove $\mathbf{M}^T$ è la trasposta di $\mathbf{M}$. Nel nostro caso abbiamo che:

$$\mathbf{S}^T(\mathbf{p}, m) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{p_3} & \frac{p_2}{p_3^2} \\ \frac{1}{p_3} & 0 & -\frac{p_1}{p_3^2} \\ -\frac{p_2}{p_3^2} & \frac{p_1}{p_3^2} & 0 \end{bmatrix}$$

e quindi:

$$\frac{\mathbf{S}(\mathbf{p}, m) + \mathbf{S}^T(\mathbf{p}, m)}{2} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{p_3} & -\frac{p_2}{p_3^2} \\ -\frac{1}{p_3} & 0 & \frac{p_1}{p_3^2} \\ \frac{p_2}{p_3^2} & -\frac{p_1}{p_3^2} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{p_3} & \frac{p_2}{p_3^2} \\ \frac{1}{p_3} & 0 & -\frac{p_1}{p_3^2} \\ -\frac{p_2}{p_3^2} & \frac{p_1}{p_3^2} & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

È evidente che, per ogni $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{z} \cdot \frac{\mathbf{S}+\mathbf{S}^T}{2}\mathbf{z} = 0$. La forma quadratica è quindi semidefinita negativa nonostante l'assioma debole delle preferenze rivelate sia violato. Il fatto che la forma quadratica associata alla matrice di sostituzione di Slutksy sia semidefinita negativa, quindi, non rappresenta una condizione sufficiente per la validità del WARP.

## Riferimenti bibliografici

[1] Mas-Colell, Andreu, Michael D. Whinston e Jerry R. Green (1995), *Microeconomic Theory*, Oxford e New York, Oxford University Press.