Microeconomia – a.a. 2017/2018

Corso di Laurea Magistrale in Economia e Politica Economica

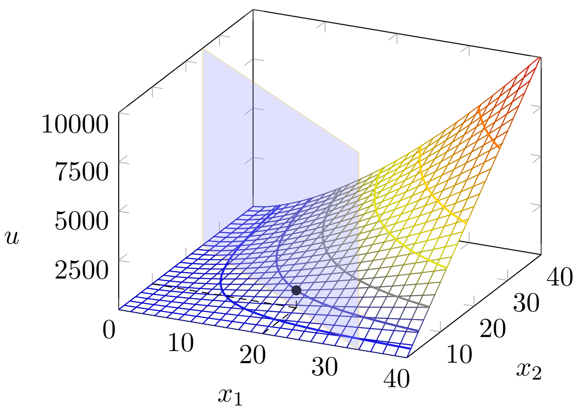
Nicola Campigotto · nicola.campigotto2<at>unibo.it

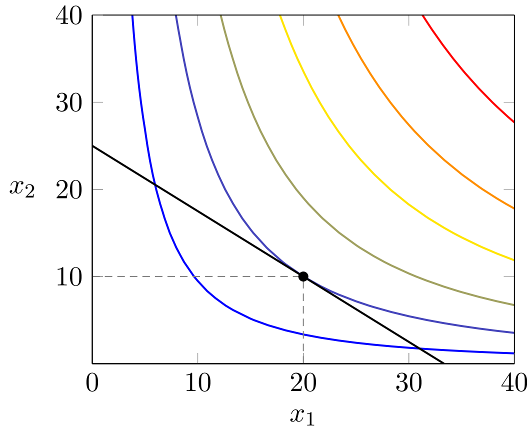
Esercitazione 1 – 29 settembre 2017

Esercizio 1

Sia la funzione di utilità del consumatore $u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{3}{2}} x_2$ e siano $p_1 = 3$, $p_2 = 4$ e $m = 100$, rispettivamente, i prezzi fronteggiati dal consumatore e la ricchezza esogena.

1. Si calcoli il paniere domandato dal consumatore.
2. Si calcoli l'utilità massima raggiunta.





Il problema del consumatore è:

$$\max_{x_1,x_2} \quad u\left(x_1, x_2\right) = x_1^{\frac{3}{2}} x_2$$
$$\text{s.v.} \quad 3x_1 + 4x_2 = 100.$$

Essendo le preferenze non-saziate, il consumatore spende interamente la propria ricchezza e il vincolo di bilancio è soddisfatto con uguaglianza. La funzione lagrangiana associata al problema è:

$$\mathcal{L}\left(x_1, x_2, \lambda\right) = x_1^{\frac{3}{2}} x_2 - \lambda(3x_1 + 4x_2 - 100)$$

e il sistema delle condizioni del prim'ordine per soluzioni interiori è:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}\left(\cdot\right)}{\partial x_1} = \dfrac{3}{2} x_1^{\frac{1}{2}} x_2 - 3\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}\left(\cdot\right)}{\partial x_2} = x_1^{\frac{3}{2}} - 4\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}\left(\cdot\right)}{\partial \lambda} = 3x_1 + 4x_2 - 100 = 0. \end{cases}$$

L'uguaglianza tra saggio marginale di sostituzione e rapporto tra i prezzi — che rappresenta la condizione di tangenza tra curva di indifferenza e vincolo di bilancio — è ottenuta dividendo la prima equazione del sistema per la seconda:

$$\frac{\frac{3}{2}x_1^{\frac{1}{2}}x_2}{x_1^{\frac{3}{2}}} = \frac{3\lambda}{4\lambda} \Rightarrow \frac{3}{2}x_1^{\frac{1}{2}}x_2x_1^{-\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}x_1^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}x_2 = \frac{3}{2}x_1^{-1}x_2 = \frac{3x_2}{2x_1} = \frac{3}{4},$$

da cui si trova:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = 2x_2.$$

Sostituendo $x_1 = 2x_2$ nel vincolo di bilancio:

$$3\,(2x_2) + 4x_2 = 6x_2 + 4x_2 = 100.$$

Le quantità dei beni 1 e 2 domandate dal consumatore sono quindi:

$$x_2^* = \frac{100}{10} = 10; \qquad x_1^* = 2x_2^* = 2 \times 10 = 20,$$

mentre l'utilità massima raggiungibile (il livello della curva di indifferenza tangente il vincolo di bilancio) è:

$$u\,(x_1^*, x_2^*) = u(20, 10) = 20^{\frac{3}{2}} \times 10 = 400\sqrt{5} \approx 894,427.$$

Allo stesso risultato si può giungere applicando una trasformazione logaritmica alla funzione di utilità. Il problema diventa in questo caso:

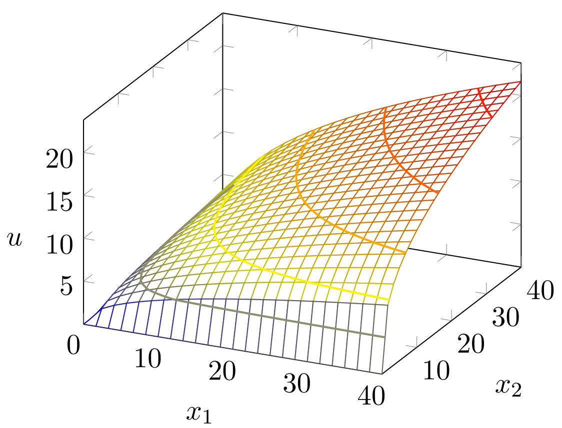
$$\begin{aligned} \max_{x_1,x_2} \quad & u(x_1, x_2) = \frac{3}{2}\log x_1 + \log x_2 \\ \text{s.v.} \quad & 3x_1 + 4x_2 = 100. \end{aligned}$$

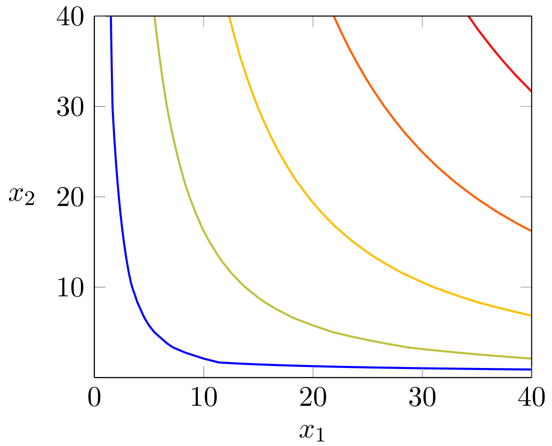
Esercizio 2

Sia la funzione di utilità del consumatore $u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{3}}$, e siano p_1, p_2 e m i prezzi che egli fronteggia e la sua ricchezza.

1. Considerando soluzioni interiori, si calcolino le domande walrasiane per i due beni.

2. Si trovi la funzione di utilità indiretta.





Applicando una trasformazione logaritmica alla funzione di utilità del consumatore si ottiene $u(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\log x_1 + \frac{1}{3}\log x_2$. Il problema di ottimo vincolato è quindi:

$$\begin{aligned} \max_{x_1,x_2} \quad & u(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\log x_1 + \frac{1}{3}\log x_2 \\ \text{s.v.} \quad & p_1 x_1 + p_2 x_2 = m. \end{aligned}$$

Costruita la lagrangiana $\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = \frac{1}{2}\log x_1 + \frac{1}{3}\log x_2 - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - m)$, si deriva il sistema delle condizioni del prim'ordine:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_1} = \dfrac{1}{2x_1} - \lambda p_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_2} = \dfrac{1}{3x_2} - \lambda p_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda} = p_1x_1 + p_2x_2 - m = 0. \end{cases}$$

La relazione tra saggio marginale di sostituzione e rapporto tra i prezzi è quindi data da:

$$\frac{\frac{1}{2x_1}}{\frac{1}{3x_2}} = \frac{3x_2}{2x_1} = \frac{p_1}{p_2},$$

da cui si ottiene:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{2p_1}{3p_2} \Rightarrow x_2 = \frac{2p_1}{3p_2}x_1.$$

Sostituendo $x_2 = \frac{2p_1}{3p_2}x_1$ nel vincolo di bilancio, si trova:

$$p_1x_1 + p_2\left(\frac{2p_1}{3p_2}x_1\right) = p_1x_1 + \frac{2p_1}{3}x_1 = \frac{5p_1}{3}x_1 = m$$

e la funzione di domanda marshalliana relativa al bene x_1 è quindi:

$$x_1^*(p_1, m) = \frac{3m}{5p_1},$$

mentre la funzione di domanda marshalliana relativa al bene x_2 è:

$$x_2^*(p_2, m) = \frac{2p_1}{3p_2}x_1^*(p_1, m) = \frac{2p_1}{3p_2}\frac{3m}{5p_1} = \frac{2m}{5p_2}.$$

La funzione di utilità indiretta, infine, è:

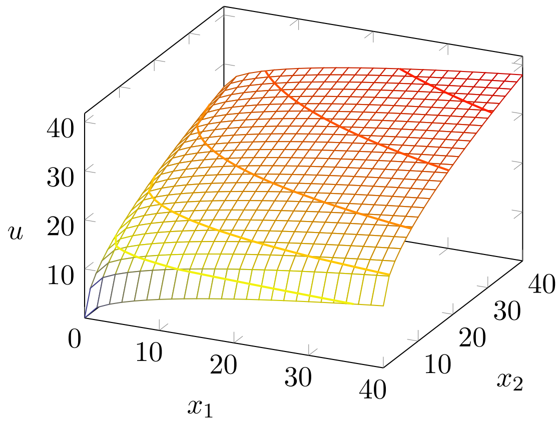
$$v(\mathbf{p}, m) = u(x_1^*(p_1, m), x_2^*(p_2, m)) = \left(\frac{3m}{5p_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2m}{5p_2}\right)^{\frac{1}{3}} = m^{\frac{5}{6}}\left(\frac{3}{5p_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{5p_2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

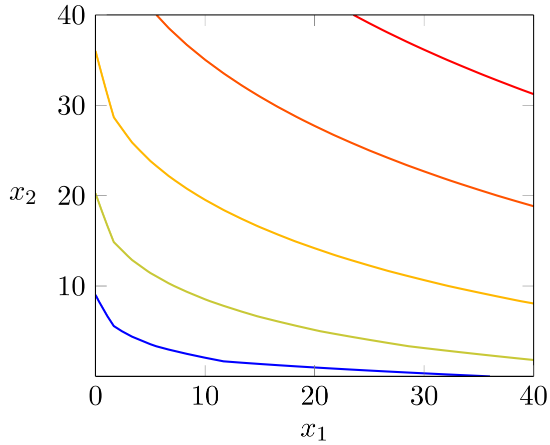
Esercizio 3

Sia la funzione di utilità del consumatore $u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}} + 4x_2^{\frac{1}{2}}$, e siano p_1, p_2 e m i prezzi che egli fronteggia e la sua ricchezza.

1. Considerando soluzioni interiori, si imposti il problema di massimizzazione dell'utilità e si calcolino le domande walrasiane per i due beni.

2. Si trovi la funzione di utilità indiretta.





Considerando solo soluzioni interiori, il problema di ottimo del consumatore

$$\begin{aligned} \max_{x_1,x_2} \quad & u(x_1,x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}} + 4x_2^{\frac{1}{2}} \\ \text{s.v.} \quad & p_1x_1 + p_2x_2 = m \end{aligned}$$

si risolve costruendo la lagrangiana $\mathcal{L}(x_1,x_2,\lambda) = 2x_1^{\frac{1}{2}} + 4x_2^{\frac{1}{2}} - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - m)$ e ricavando le condizioni del prim'ordine:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_1} = 2 \times \dfrac{1}{2}x_1^{-\frac{1}{2}} - \lambda p_1 = \dfrac{1}{x_1^{\frac{1}{2}}} - \lambda p_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_2} = 4 \times \dfrac{1}{2}x_2^{-\frac{1}{2}} - \lambda p_2 = \dfrac{2}{x_2^{\frac{1}{2}}} - \lambda p_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda} = p_1x_1 + p_2x_2 - m = 0. \end{cases}$$

Dividendo la prima equazione per la seconda si trova:

$$\frac{\frac{1}{x_1^{\frac{1}{2}}}}{\frac{2}{x_2^{\frac{1}{2}}}} = \frac{x_2^{\frac{1}{2}}}{2x_1^{\frac{1}{2}}} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2p_1}{p_2}$$

da cui si ottiene:

$$\frac{x_2}{x_1} = \left(\frac{2p_1}{p_2}\right)^2 \Rightarrow x_2 = \left(\frac{2p_1}{p_2}\right)^2 x_1.$$

Il vincolo di bilancio può quindi essere riscritto come:

$$\begin{aligned} m &= p_1x_1 + p_2\left(\frac{4p_1^2}{p_2^2}x_1\right) \\ &= p_1x_1 + \frac{4p_1^2}{p_2}x_1 \\ &= p_1x_1\left(1 + \frac{4p_1}{p_2}\right), \end{aligned}$$

da cui si ottiene $x_1\left(\frac{p_2+4p_1}{p_2}\right) = \frac{m}{p_1}$. La domanda marshalliana relativa al bene x_1 è perciò:

$$x_1^*(\mathbf{p}, m) = \frac{mp_2}{p_1p_2 + 4p_1^2},$$

mentre la marshalliana relativa al bene x_2 è:

$$x_2^*(\mathbf{p}, m) = \left(\frac{2p_1}{p_2}\right)^2 x_1^*(\mathbf{p}, m) = \frac{4p_1^2}{p_2^2}\frac{mp_2}{p_1(4p_1+p_2)} = \frac{4mp_1}{4p_1p_2+p_2^2}.$$

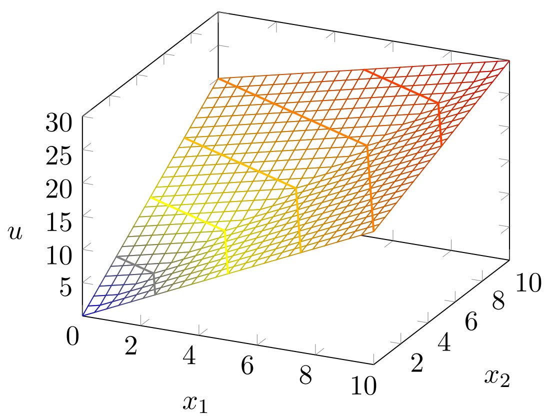
La funzione di utilità indiretta è dunque:

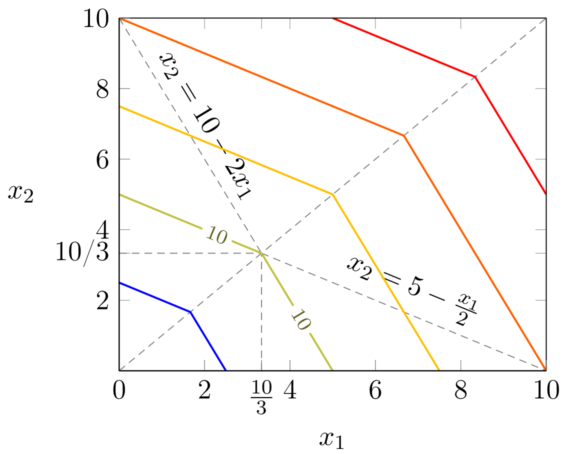
$$\begin{aligned} v(\mathbf{p}, m) = u\left(x_1^*(\mathbf{p}, m), x_2^*(\mathbf{p}, m)\right) &= 2\left(\frac{mp_2}{p_1p_2+4p_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} + 4\left(\frac{4mp_1}{4p_1p_2+p_2^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2m^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{p_2}{p_1p_2+4p_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} + 4\left(\frac{p_1}{4p_1p_2+p_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]. \end{aligned}$$

Esercizio 4

Sia $u(x_1, x_2) = \max\{2x_1 + x_2;\ x_1 + 2x_2\}$ la funzione di utilità di un consumatore.

1. Si rappresenti graficamente la curva di indifferenza di livello 10.
2. Quali sono le proprietà soddisfatte da queste preferenze?
3. Denotando con p_1 e p_2 i prezzi dei due beni, si determini per quali valori di p_1/p_2 la scelta ottimale del consumatore si trova in corrispondenza di $x_1 = 0$.
4. Si determini per quali valori di p_1/p_2 la scelta ottimale del consumatore si trova in corrispondenza di $x_2 = 0$.
5. Si determini per quali valori di p_1/p_2 la scelta ottimale del consumatore corrisponde a una soluzione interiore.





La funzione di utilità può essere alternativamente espressa come:

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} 2x_1 + x_2 & \forall\ x_1 \geq x_2 \\ x_1 + 2x_2 & \forall\ x_1 \leq x_2. \end{cases}$$

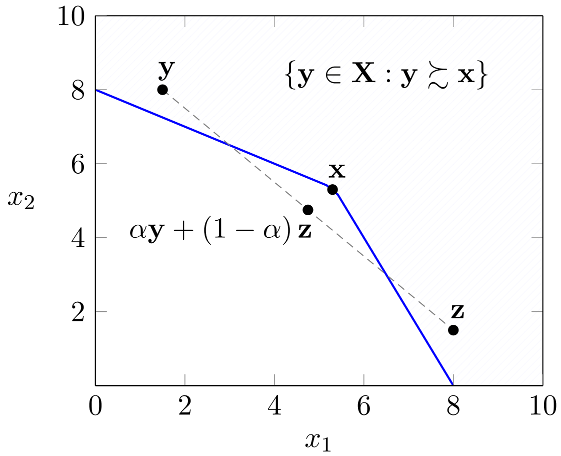
La curva di indifferenza di livello 10, rappresentata nel grafico a destra, ha perciò equazione:

$$x_2 = \begin{cases} 10 - 2x_1 & \forall\ x_1 \geq \dfrac{10}{3} \\ 5 - \dfrac{x_1}{2} & \forall\ x_1 \leq \dfrac{10}{3}. \end{cases}$$

Le preferenze rappresentate da $u(x_1, x_2) = \max\{2x_1 + x_2;\ x_1 + 2x_2\}$ sono complete, transitive, strettamente monotone e continue. Non sono però convesse, ossia, dati $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$:

$$\forall\ \alpha \in [0,1]: \quad (\mathbf{y} \succsim \mathbf{x}) \wedge (\mathbf{z} \succsim \mathbf{x}) \not\Rightarrow \alpha\mathbf{y} + (1-\alpha)\,\mathbf{z} \succsim \mathbf{x}.$$

Questo significa che l'insieme di livello superiore $\{\mathbf{y} \in \mathbf{X} : \mathbf{y} \succsim \mathbf{x}\}$ non è convesso:

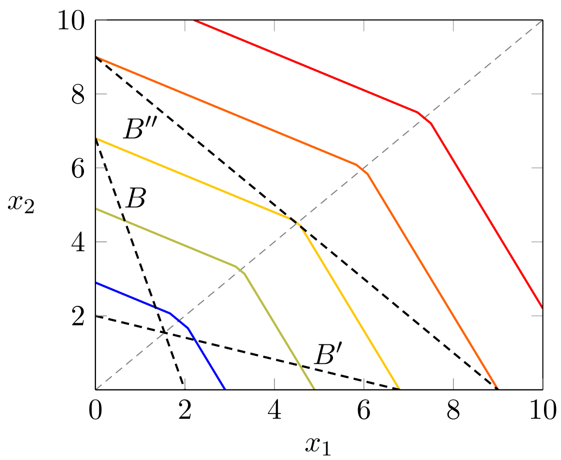


La funzione di utilità è continua ma non differenziabile (il saggio marginale di sostituzione non può essere calcolato in corrispondenza del punto angoloso). La soluzione del problema di ottimo del consumatore può essere però ricavata per via grafica.

- Quando $\frac{p_1}{p_2} > 1$ (ossia $p_1 > p_2$) si ha una soluzione d'angolo sull'asse delle ordinate, con $x_1^* = 0$ e $x_2^* = \frac{m}{p_2}$. Si veda ad esempio il vincolo B, che ha inclinazione (in valore assoluto) pari a 2.

- Quando $\frac{p_1}{p_2} < 1$ (ossia $p_1 < p_2$) si ha una soluzione d'angolo sull'asse delle ascisse, con $x_2^* = 0$ e $x_1^* = \frac{m}{p_1}$. Si veda ad esempio il vincolo B', che ha inclinazione (in valore assoluto) pari a $\frac{1}{2}$.

- Quando $\frac{p_1}{p_2} = 1$ (ossia $p_1 = p_2$) si ha una soluzione interiore. Si veda ad esempio il vincolo B''.



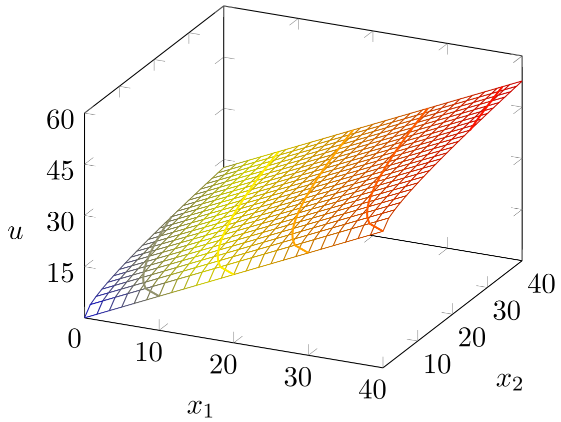
Esercizio 5

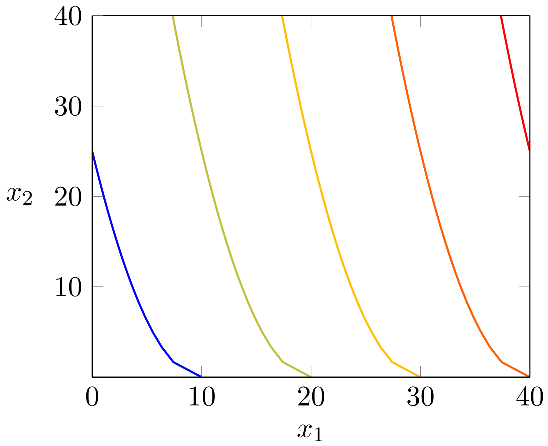
Un consumatore con ricchezza m e funzione di utilità $u(x_1, x_2) = x_1 + 2\sqrt{x_2}$ fronteggia i prezzi p_1 e p_2.

1. Quali caratteristiche hanno le curve di indifferenza e il saggio marginale di sostituzione tra i due beni?

2. Considerando la possibilità di soluzioni d'angolo, si imposti il problema di massimizzazione dell'utilità e si calcolino le domande walrasiane per i due beni.

3. Si trovi la funzione di utilità indiretta.





La funzione di utilità, lineare in x_1 e strettamente concava in x_2, corrisponde a preferenze del tipo quasi-lineare. Questo tipo di preferenze implica che

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \quad (x_1', x_2') \sim (x_1'', x_2'') \Rightarrow (x_1' + \varepsilon, x_2') \sim (x_1'' + \varepsilon, x_2''),$$

ossia che, a parità di x_2 e all'aumentare del solo x_1, la relazione di indifferenza rimane soddisfatta. Le curve di indifferenza, che toccano gli assi, sono dunque ottenute dalla traslazione della stessa curva. Il saggio marginale di sostituzione, inoltre, è indipendente dal termine lineare della funzione di utilità (in questo caso, x_1):

$$SMS_{1,2} = \frac{\frac{\partial u(\cdot)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(\cdot)}{\partial x_2}} = \frac{1}{x_2^{-\frac{1}{2}}} = x_2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_2}.$$

La possibilità di soluzioni d'angolo rende necessario risolvere il problema utilizzando le condizioni di Kuhn-Tucker. A partire dalla lagrangiana:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = x_1 + 2\sqrt{x_2} - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)$$

si ricavano le condizioni:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_1} \leq 0 \Rightarrow 1 - \lambda p_1 \leq 0 \qquad (1)$$

$$x_1 \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow x_1 (1 - \lambda p_1) = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_2} \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_2}} - \lambda p_2 \leq 0 \tag{3}$$

$$x_2 \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow x_2 \left(\frac{1}{\sqrt{x_2}} - \lambda p_2 \right) = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow p_1 x_1 + p_2 x_2 - m = 0. \tag{5}$$

Procedendo caso per caso, si può verificare che:

(i) Il caso di una soluzione d'angolo sull'asse delle ascisse ($x_1^* > 0$ e $x_2^* = 0$) è impossibile perché in contraddizione con la (3).

(ii) Il caso di una soluzione d'angolo sull'asse delle ordinate ($x_1^* = 0$ e $x_2^* > 0$) permette di riscrivere il vincolo di bilancio come $p_2 x_2 = m$, da cui si trova:

$$x_2^* (p_2, m) = \frac{m}{p_2}.$$

Poiché $x_2^* > 0$, la (3) vale come uguaglianza. Si ha dunque:

$$\frac{1}{\sqrt{x_2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{p_2}}} = \sqrt{\frac{p_2}{m}} = \lambda p_2 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{m p_2}}.$$

Sostituendo $\lambda = 1/\sqrt{m p_2}$ nella (1), si trova inoltre:

$$\lambda p_1 = \frac{p_1}{\sqrt{m p_2}} \geq 1 \Rightarrow p_1 \geq \sqrt{m p_2},$$

che implica $p_1^2 \geq m p_2$, ossia $\frac{p_1^2}{p_2} \geq m$. Dividendo ambo i lati per p_1 si ottiene:

$$\frac{p_1}{p_2} \geq \frac{m}{p_1},$$

che è la condizione che determina il verificarsi della soluzione d'angolo.

(iii) Il caso di una soluzione interna ($x_1^* > 0$ e $x_2^* > 0$) si risolve considerando (1) e (3) come uguaglianze e dividendo la prima per la seconda, ottenendo la condizione di tangenza:

$$\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x_2}}} = \sqrt{x_2} = \frac{p_1}{p_2},$$

da cui si trova la domanda per il bene 2, che è indipendente dalla ricchezza del consumatore:

$$x_2^* (\mathbf{p}) = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^2.$$

Sostituendo nel vincolo di bilancio si ha infine:

$$p_1 x_1 + p_2 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^2 = m \;\Rightarrow\; p_1 x_1 = m - \frac{p_1^2}{p_2},$$

da cui si trova:

$$x_1^* (\mathbf{p}, m) = \frac{m}{p_1} - \frac{p_1}{p_2}$$

che è positiva quando:

$$\frac{m}{p_1} > \frac{p_1}{p_2}.$$

Le marshalliane relative ai due beni sono quindi:

$$x_1^*(\mathbf{p},m)=\begin{cases}0 & \text{se} \quad \dfrac{p_1}{p_2}\geq\dfrac{m}{p_1}\\ \dfrac{m}{p_1}-\dfrac{p_1}{p_2} & \text{se} \quad \dfrac{p_1}{p_2}<\dfrac{m}{p_1}\end{cases}, \qquad x_2^*(\mathbf{p},m)=\begin{cases}\dfrac{m}{p_2} & \text{se} \quad \dfrac{p_1}{p_2}\geq\dfrac{m}{p_1}\\ \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^2 & \text{se} \quad \dfrac{p_1}{p_2}<\dfrac{m}{p_1}\end{cases},$$

e la funzione di utilità indiretta è:

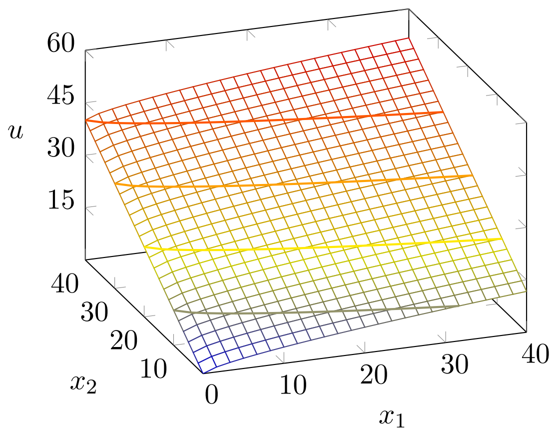
$$v(\mathbf{p},m)=u\left(x_1^*(\mathbf{p},m),x_2^*(\mathbf{p},m)\right)=\begin{cases}2\sqrt{\dfrac{m}{p_2}} & \text{se} \quad \dfrac{p_1}{p_2}\geq\dfrac{m}{p_1}\\ \dfrac{m}{p_1}+\dfrac{p_1}{p_2} & \text{se} \quad \dfrac{p_1}{p_2}<\dfrac{m}{p_1}\end{cases}.$$

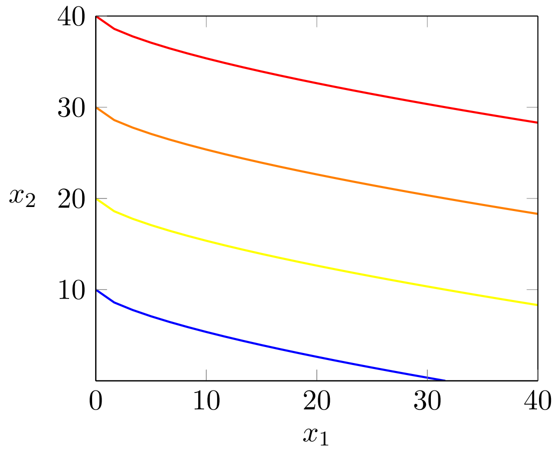
Esercizio 6

Un consumatore con reddito m e funzione di utilità $u(x_1,x_2)=x_1^{\frac{2}{3}}+x_2$ fronteggia i prezzi p_1 e p_2.

1. Si rappresentino graficamente le curve di indifferenza del consumatore. Toccano gli assi?

2. Si calcolino le funzioni di domanda marshalliana dei due beni. Sono uniche?





La funzione di utilità corrisponde nuovamente a preferenze del tipo quasi-lineare. Le curve di indifferenza, dunque, toccano gli assi. La lagrangiana relativa al problema del consumatore è:

$$\mathcal{L}(x_1,x_2,\lambda)=x_1^{\frac{2}{3}}+x_2-\lambda(p_1x_1+p_2x_2-m)$$

e le condizioni di Kuhn-Tucker sono:

$$\frac{\partial\mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_1}\leq 0\Rightarrow\frac{2}{3}x_1^{-\frac{1}{3}}-\lambda p_1\leq 0 \tag{1}$$

$$x_1\frac{\partial\mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_1}=0\Rightarrow x_1\left(\frac{2}{3}x_1^{-\frac{1}{3}}-\lambda p_1\right)=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_2}\leq 0\Rightarrow 1-\lambda p_2\leq 0 \tag{3}$$

$$x_2 \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow x_2 (1 - \lambda p_2) = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow p_1 x_1 + p_2 x_2 - m = 0. \tag{5}$$

Le condizioni permettono di verificare che:

(i) Il caso di una soluzione d'angolo sull'asse delle ordinate ($x_1^* = 0$ e $x_2^* > 0$) è impossibile perché in contraddizione con la (1).

(ii) Il caso di una soluzione d'angolo sull'asse delle ascisse ($x_1^* > 0$ e $x_2^* = 0$) permette di riscrivere il vincolo di bilancio come $p_1 x_1 = m$, da cui si trova:

$$x_1^* (p_1, m) = \frac{m}{p_1}.$$

Poiché $x_1^* > 0$, la (1) vale come uguaglianza. Si ha dunque:

$$\frac{2}{3} x_1^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \left(\frac{m}{p_1} \right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \left(\frac{p_1}{m} \right)^{\frac{1}{3}} = \lambda p_1$$

da cui si trova che:

$$\lambda = \frac{\frac{2}{3} \left(\frac{p_1}{m} \right)^{\frac{1}{3}}}{p_1} = \frac{2}{3} p_1^{\frac{1}{3}} p_1^{-1} m^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} p_1^{-\frac{2}{3}} m^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3 \left(p_1^2 m \right)^{\frac{1}{3}}}.$$

Sostituendo $\lambda = \frac{2}{3 \left(p_1^2 m \right)^{\frac{1}{3}}}$ nella (3) si ottiene:

$$\lambda p_2 = \frac{2 p_2}{3 \left(p_1^2 m \right)^{\frac{1}{3}}} \geq 1 \Rightarrow \frac{2 p_2}{3} \geq \left(p_1^2 m \right)^{\frac{1}{3}}$$

ed elevando al cubo:

$$p_1^2 m \leq \left(\frac{2 p_2}{3} \right)^3 \Rightarrow p_1^2 \leq \left(\frac{2}{3} \right)^3 \frac{p_2^3}{m}.$$

Infine, dividendo ambo i lati per $p_1 p_2$:

$$\frac{p_1}{p_2} \leq \left(\frac{2}{3} \right)^3 \frac{p_2^2}{m p_1}.$$

(iii) Il caso di una soluzione interna ($x_1^* > 0$ e $x_2^* > 0$) si risolve considerando (1) e (3) come uguaglianze e ricavando la condizione di tangenza:

$$\frac{2}{3} x_1^{-\frac{1}{3}} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{3}{2} x_1^{\frac{1}{3}} = \frac{p_2}{p_1}$$

da cui si trova la domanda per il bene 1, che è indipendente dalla ricchezza del consumatore:

$$x_1^* (\mathbf{p}) = \left(\frac{2 p_2}{3 p_1} \right)^3.$$

Sostituendo nel vincolo di bilancio si ha dunque:

$$p_1 \left(\frac{2 p_2}{3 p_1} \right)^3 + p_2 x_2 = m \;\Rightarrow\; p_2 x_2 = m - \left(\frac{2 p_2}{3} \right)^3 \left(\frac{1}{p_1} \right)^2,$$

da cui si trova:

$$x_2^*(\mathbf{p}, m) = \frac{m}{p_2} - \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2.$$

x_2^* è positiva quando:

$$\frac{m}{p_2} > \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 > \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{p_2}{m},$$

che, moltiplicando ambo i lati per p_2/p_1, si può riscrivere come:

$$\frac{p_1}{p_2} > \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{p_2^2}{mp_1}.$$

Le funzioni di domanda marshalliana dei due beni sono quindi:

$$x_1^*(\mathbf{p}, m) = \begin{cases} \left(\frac{2p_2}{3p_1}\right)^3 & \text{se} \quad \frac{p_1}{p_2} > \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{p_2^2}{mp_1} \\ \frac{m}{p_1} \quad \text{se} \quad \frac{p_1}{p_2} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{p_2^2}{mp_1} \end{cases},$$

$$x_2^*(\mathbf{p}, m) = \begin{cases} \frac{m}{p_2} - \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 & \text{se} \quad \frac{p_1}{p_2} > \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{p_2^2}{mp_1} \\ 0 \quad \text{se} \quad \frac{p_1}{p_2} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{p_2^2}{mp_1} \end{cases}$$

e sono uniche, essendo le preferenze strettamente convesse.

Esercizio 7

Un consumatore con reddito m e funzione di utilità $u(x_1, x_2) = \min\left\{x_1,\ x_2^{\frac{1}{2}}\right\}$ fronteggia i prezzi p_1 e p_2.

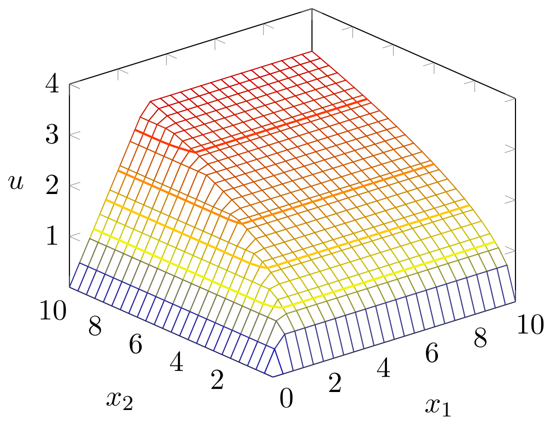
1. Quali caratteristiche hanno le curve di indifferenza e il saggio marginale di sostituzione tra i due beni?

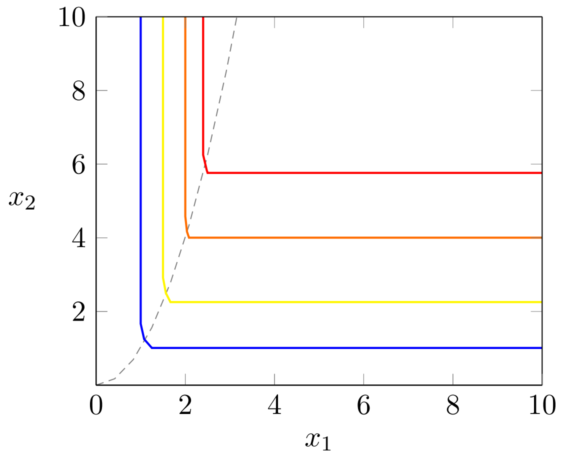
2. Si calcolino le domande walrasiane dei due beni.

3. Si trovi la funzione di utilità indiretta.

La funzione di utilità rappresenta preferenze per beni perfetti complementi. Al consumatore importa solamente la proporzione in cui i beni vengono consumati: l'utilità non viene quindi influenzata dal possedere un bene in eccedenza rispetto alla proporzione desiderata — proporzione che in questo caso è data da $x_1 = x_2^{\frac{1}{2}}$, ossia $x_2 = x_1^2$.

Le curve di indifferenza hanno forma a 'L' e presentano un punto angoloso in corrispondenza del luogo geometrico $x_2 = x_1^2$. Nel tratto verticale di ciascuna curva si ha $SMS_{1,2} = -\infty$ (il consumatore mantiene invariata la propria utilità rinunciando a una unità del bene 1 in cambio di una quantità addizionale infinita del bene 2), mentre nel tratto orizzontale si ha $SMS_{1,2} = 0$ (il consumatore mantiene invariata la propria utilità rinunciando ad una unità del bene 1 senza ricevere nessuna quantità addizionale del bene 2). In corrispondenza del punto angoloso, infine, il saggio marginale di sostituzione non può essere calcolato. La funzione è dunque continua ma non differenziabile.





La scelta ottima del consumatore si trova in corrispondenza del punto di intersezione tra il luogo $x_2 = x_1^2$ e il vincolo di bilancio. Le marshalliane possono perciò essere calcolate risolvendo:

$$\begin{cases} x_2 = x_1^2 \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m. \end{cases}$$

Sostituendo $x_2 = x_1^2$ nella seconda equazione si ottiene $p_2 x_1^2 + p_1 x_1 - m = 0$, la cui formula risolutiva è:

$$\frac{-p_1 \pm \sqrt{p_1^2 + 4p_2 m}}{2p_2}.$$

Assumendo $\mathbf{X} = \mathbb{R}_+^2$ e $\sqrt{p_1^2 + 4p_2 m} > p_1$, l'unica soluzione ammissibile è:

$$x_1^* (\mathbf{p}, m) = \frac{\sqrt{p_1^2 + 4p_2 m} - p_1}{2p_2},$$

che rappresenta la domanda marshalliana relativa al bene 1. La marshalliana relativa al bene 2 è quindi:

$$\begin{aligned} x_2^* (\mathbf{p}, m) = \left(\frac{\sqrt{p_1^2 + 4p_2 m} - p_1}{2p_2} \right)^2 &= \frac{2p_1^2 + 4p_2 m - 2p_1 \sqrt{p_1^2 + 4p_2 m}}{4p_2^2} \\ &= \frac{p_1^2 + 2p_2 m - p_1 \sqrt{p_1^2 + 4p_2 m}}{2p_2^2} \end{aligned}$$

e la funzione di utilità indiretta è:

$$v (\mathbf{p}, m) = \min \{ x_1^* (\mathbf{p}, m), \ x_2^* (\mathbf{p}, m) \} = \frac{\sqrt{p_1^2 + 4p_2 m} - p_1}{2p_2}.$$

Esercizio 8

Un consumatore con reddito m e funzione di utilità $u (x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 x_3$ fronteggia i prezzi p_1, p_2 e p_3.

1. Considerando le condizioni di Kuhn-Tucker, si ricavino le funzioni di domanda walrasiana per i tre beni.

2. Si calcoli la funzione di utilità indiretta.

Il problema di ottimo del consumatore è:

$$\begin{aligned} \max_{x_1,x_2,x_3} \quad & u(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 x_3 \\ \text{s.v.} \quad & p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = m. \end{aligned}$$

Ad esso corrispondono la lagrangiana

$$\mathcal{L}(x_1,x_2,x_3,\lambda) = x_1 + x_2 x_3 - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 - m)$$

e le condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_1} &\leq 0 \Rightarrow 1 - \lambda p_1 \leq 0 && (1)\\
x_1 \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_1} &= 0 \Rightarrow x_1(1 - \lambda p_1) = 0 && (2)\\
\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_2} &\leq 0 \Rightarrow x_3 - \lambda p_2 \leq 0 && (3)\\
x_2 \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_2} &= 0 \Rightarrow x_2(x_3 - \lambda p_2) = 0 && (4)\\
\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_3} &\leq 0 \Rightarrow x_2 - \lambda p_3 \leq 0 && (5)\\
x_2 \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_3} &= 0 \Rightarrow x_3(x_2 - \lambda p_3) = 0 && (6)\\
\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda} &= 0 \Rightarrow p_1 x_1 + p_2 x_2 - m = 0. && (7)
\end{aligned}$$

Si può quindi verificare che:

(i) Il caso $x_1^*, x_3^* > 0$ e $x_2^* = 0$ non può essere verificato. La (6) implicherebbe infatti che la (5) vale con uguaglianza. Questo significherebbe che $\lambda = 0$, contraddicendo la (1).

(ii) Il caso $x_3^* > 0$ e $x_1^* = x_2^* = 0$ non può essere verificato per il motivo di cui al punto precedente.

(iii) Il caso $x_1^*, x_2^* > 0$ e $x_3^* = 0$ non può essere verificato. La (4) implicherebbe infatti che la (3) vale con uguaglianza. Questo significherebbe che $\lambda = 0$, contraddicendo la (1).

(iv) il caso $x_2^* > 0$ e $x_1^* = x_2^* = 0$ non può essere verificato per il motivo di cui al punto precedente.

(v) Il caso $x_2^*, x_3^* > 0$ e $x_1^* = 0$ implica che, dalla (4), la (3) vale con uguaglianza. Si ha dunque:

$$x_3 = \lambda p_2.$$

Analogamente, la (6) implica che la (5) vale con uguaglianza:

$$x_2 = \lambda p_3.$$

Sostituendo nel vincolo di bilancio si ottiene:

$$p_2 \lambda p_3 + p_3 \lambda p_2 = 2\lambda p_2 p_3 = m \Rightarrow \lambda = \frac{m}{2p_2 p_3}$$

e dunque:

$$x_2^*(p_2, m) = \frac{m}{2p_2 p_3} p_3 = \frac{m}{2p_2}; \qquad x_3^*(p_3, m) = \frac{m}{2p_2 p_3} p_2 = \frac{m}{2p_3}.$$

(vi) Il caso $x_1^* > 0$ e $x_2^* = x_3^* = 0$ implica che, dalla (7):

$$x^*(p_1, m) = \frac{m}{p_1}.$$

(vii) Il caso di una soluzione interiore ($x_1^*, x_2^*, x_3^* > 0$) si risolve considerando (1), (3) e (5) come uguaglianze. Dalla (1) si ha che:

$$\lambda = \frac{1}{p_1}.$$

Sostituendo nella (3) si trova quindi $x_3 - \frac{p_2}{p_1} = 0$, da cui:

$$x_3^*(p_1, p_2) = \frac{p_2}{p_1},$$

che non dipende dalla ricchezza m. Analogamente, sostituendo $\lambda = 1/p_1$ nella (5) si ottiene $x_2 - \frac{p_3}{p_1} = 0$, da cui:

$$x_2^*(p_1, p_3) = \frac{p_3}{p_1},$$

anch'essa indipendente da m. Sostituendo nella (7), infine, si trova:

$$p_1 x_1 + p_2 \frac{p_3}{p_1} + p_3 \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_1^2 x_1 + p_2 p_3 + p_3 p_2}{p_1} = \frac{p_1^2 x_1 + 2p_2 p_3}{p_1} = m,$$

da cui:

$$x_1^*(\mathbf{p}, m) = \frac{p_1 m - 2p_2 p_3}{p_1^2}.$$

La funzione di utilità indiretta corrispondente al caso (v) è:

$$v_{\text{v}}(p_2, p_3, m) = x_1^* + x_2^* x_3^* = \frac{m}{2p_2} \frac{m}{2p_3} = \frac{m^2}{4p_2 p_3}.$$

Nel caso (vi) è invece:

$$v_{\text{vi}}(p_1, m) = \frac{m}{p_1},$$

mentre nel caso (vii) è:

$$v_{\text{vii}}(\mathbf{p}, m) = \frac{p_1 m - 2p_2 p_3}{p_1^2} + \frac{p_3}{p_1} \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_1 m - p_2 p_3}{p_1^2}.$$

Confrontando le funzioni di utilità indiretta è possibile determinare quali funzioni marshalliane corrispondono a un massimo locale in determinati intervalli. Il caso $v_{\text{vii}}(\cdot) > v_{\text{vi}}(\cdot)$ non potrà mai verificarsi, poiché:

$$\frac{p_1 m - p_2 p_3}{p_1^2} > \frac{m}{p_1} \Rightarrow \frac{p_1 m - p_2 p_3}{p_1} > m \Rightarrow m - \frac{p_2 p_3}{p_1} > m \Rightarrow \frac{2p_2 p_3}{p_1} < 0,$$

che è impossibile per p_1, p_2 e p_3 non negativi. Anche il caso $v_{\text{vii}}(\cdot) > v_{\text{v}}(\cdot)$ non è mai verificato, poiché

$$\frac{p_1 m - p_2 p_3}{p_1^2} > \frac{m^2}{4p_2 p_3} \Rightarrow 4p_1 p_2 p_3 m - (2p_2 p_3)^2 > (p_1 m)^2 \Rightarrow (p_1 m - 2p_2 p_3)^2 < 0$$

che è impossibile. Infine, $v_{\text{v}}(\cdot) > v_{\text{vi}}(\cdot)$ si ha quando:

$$\frac{m^2}{4p_2p_3} > \frac{m}{p_1} \Rightarrow m > \frac{4p_2p_3}{p_1}.$$

Viceversa, per $m \leq \frac{4p_2p_3}{p_1}$ si ha $v_{\text{vi}}(\cdot) > v_{\text{v}}(\cdot)$. L'ottimo corrisponde quindi sempre a una soluzione d'angolo. Le funzioni di domanda marshalliana sono:

$$x_1^*(p_1,m) = \begin{cases} 0 \quad \text{se} \quad m > \dfrac{4p_2p_3}{p_1} \\ \dfrac{m}{p_1} \quad \text{se} \quad m \leq \dfrac{4p_2p_3}{p_1} \end{cases}, \quad x_2^*(p_2,m) = \begin{cases} \dfrac{m}{2p_2} \quad \text{se} \quad m > \dfrac{4p_2p_3}{p_1} \\ 0 \quad \text{se} \quad m \leq \dfrac{4p_2p_3}{p_1} \end{cases},$$

$$x_3^*(p_3,m) = \begin{cases} \dfrac{m}{2p_3} \quad \text{se} \quad m > \dfrac{4p_2p_3}{p_1} \\ 0 \quad \text{se} \quad m \leq \dfrac{4p_2p_3}{p_1} \end{cases},$$

e la funzione di utilità indiretta è:

$$v_{\text{vi}}(\mathbf{p},m) = \begin{cases} \dfrac{m^2}{4p_2p_3} \quad \text{se} \quad m > \dfrac{4p_2p_3}{p_1} \\ \dfrac{m}{p_1} \quad \text{se} \quad m \leq \dfrac{4p_2p_3}{p_1} \end{cases}.$$

Esercizio 9

Si consideri la funzione:

$$v(p_1,p_2,m) = \frac{m}{p_1} + \frac{m}{p_2},$$

con $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ e $m > 0$ che rappresentano, rispettivamente, i prezzi dei beni 1 e 2 e la ricchezza del consumatore.

1. Si verifichi se $v(\cdot)$ è una funzione di utilità indiretta.

$v(\cdot)$ è una funzione di utilità indiretta, essendo:

- Omogenea di grado zero in $(\mathbf{p},m)$:

$$v(\alpha p_1,\alpha p_2,\alpha m) = \frac{\alpha m}{\alpha p_1} + \frac{\alpha m}{\alpha p_2} = \frac{m}{p_1} + \frac{m}{p_2}.$$

- Crescente in m e non-crescente in p_1 e p_2:

$$\frac{\partial v(\cdot)}{\partial m} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > 0; \quad \frac{\partial v(\cdot)}{\partial p_1} = -mp_1^{-2} < 0; \quad \frac{\partial v(\cdot)}{\partial p_2} = -mp_2^{-2} < 0.$$

- Continua in p_1, p_2 e m, essendo ottenuta dalla composizione di funzioni continue (le funzioni polinomiali sono sempre continue, così come le somme e i prodotti tra funzioni polinomiali; i rapporti tra funzioni polinomiali sono continui se definiti, ossia se hanno il denominatore diverso da zero) ed essendo $p_1, p_2 > 0$.

- Quasi-convessa in p_1, p_2 e m... Ma questo non lo dimostriamo.