Microeconomia – a.a. 2017/2018

Corso di Laurea Magistrale in Economia e Politica Economica

Nicola Campigotto · nicola.campigotto2<at>unibo.it

Esercitazioni 2 e 3 – 6/13 ottobre 2017

Esercizio 1

(*Continua da 1.2*) Sia la funzione di utilità di un consumatore $u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{3}}$ e siano p_1, p_2 e u, rispettivamente, i prezzi dei due beni e l'utilità minima del consumatore.

1. Considerando soluzioni interiori, si imposti il problema di minimizzazione della spesa e si calcolino le funzioni di domanda hicksiane per i due beni.
2. Si trovi la funzione di spesa.

Il problema di minimizzazione della spesa del consumatore è:

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \quad & p_1x_1 + p_2x_2 \\ \text{s.v.} \quad & x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{3}} \geq u, \end{aligned}$$

e la funzione lagrangiana corrispondente è $\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = p_1x_1 + p_2x_2 - \lambda \left(x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{3}} - u \right)$. Il sistema delle condizioni del prim'ordine è quindi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_1} = p_1 - \dfrac{\lambda}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{3}} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_2} = p_2 - \dfrac{\lambda}{3} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{2}{3}} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda} = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{3}} - u = 0. \end{cases}$$

Dividendo la prima equazione per la seconda si ottiene:

$$\frac{\frac{x_2^{\frac{1}{3}}}{2x_1^{\frac{1}{2}}}}{\frac{x_1^{\frac{1}{2}}}{3x_2^{\frac{2}{3}}}} = \left(\frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{3}} \right) \left(3x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{2}{3}} \right) = \frac{3x_2}{2x_1} = \frac{p_1}{p_2},$$

da cui si trova:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{2p_1}{3p_2} \Rightarrow x_2 = \frac{2p_1}{3p_2} x_1.$$

Sostituendo $x_2 = \frac{2p_1}{3p_2} x_1$ nel vincolo, questo può essere riscritto come:

$$x_1^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2p_1}{3p_2} x_1 \right)^{\frac{1}{3}} = u,$$

ossia:

$$x_1^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = x_1^{\frac{5}{6}} = u\left(\frac{3p_2}{2p_1}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

La funzione di domanda hicksiana relativa al bene 1 è dunque:

$$h_1^*(\mathbf{p},u) = u^{\frac{6}{5}}\left(\frac{3p_2}{2p_1}\right)^{\frac{2}{5}},$$

mentre la domanda hicksiana relativa al bene 2 è:

$$\begin{aligned}
h_2^*(\mathbf{p},u) = \frac{2p_1}{3p_2}h_1^*(\mathbf{p},u) &= \frac{2p_1}{3p_2}u^{\frac{6}{5}}\left(\frac{3p_2}{2p_1}\right)^{\frac{2}{5}} \\
&= u^{\frac{6}{5}}(2p_1)^{1-\frac{2}{5}}(3p_2)^{\frac{2}{5}-1} \\
&= u^{\frac{6}{5}}(2p_1)^{\frac{3}{5}}(3p_2)^{-\frac{3}{5}} \\
&= u^{\frac{6}{5}}\left(\frac{2p_1}{3p_2}\right)^{\frac{3}{5}}.
\end{aligned}$$

La funzione di spesa, infine, è:

$$\begin{aligned}
e(\mathbf{p},u) = p_1h_1^*(\mathbf{p},u) + p_2h_2^*(\mathbf{p},u) &= p_1u^{\frac{6}{5}}\left(\frac{3p_2}{2p_1}\right)^{\frac{2}{5}} + p_2u^{\frac{6}{5}}\left(\frac{2p_1}{3p_2}\right)^{\frac{3}{5}} \\
&= u^{\frac{6}{5}}\left[p_1\left(\frac{3p_2}{2}\right)^{\frac{2}{5}}p_1^{-\frac{2}{5}} + p_2\left(\frac{2p_1}{3}\right)^{\frac{3}{5}}p_2^{-\frac{3}{5}}\right] \\
&= u^{\frac{6}{5}}\left[p_1^{\frac{3}{5}}\left(\frac{3p_2}{2}\right)^{\frac{2}{5}} + p_2^{\frac{2}{5}}\left(\frac{2p_1}{3}\right)^{\frac{3}{5}}\right] \\
&= u^{\frac{6}{5}}p_1^{\frac{3}{5}}p_2^{\frac{2}{5}}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{5}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{5}}\right].
\end{aligned}$$

Esercizio 2

(*Continua da 1.3*) Sia la funzione utilità di un consumatore $u(x_1,x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}} + 4x_2^{\frac{1}{2}}$ e siano p_1, p_2, m e u, rispettivamente, i prezzi dei due beni, la ricchezza e l'utilità minima del consumatore.

1. Si verifichi l'Identità di Roy.
2. Considerando soluzioni interiori, si calcolino le domande hicksiane per i due beni.
3. Si calcoli la funzione di spesa.
4. Si verifichi il Lemma di Shephard.
5. Si determini se i beni 1 e 2 sono sostituti o complementi lordi.
6. Si determini se i beni 1 e 2 sono sostituti o complementi netti.

Le funzioni marshalliane calcolate nell'esercizio 1.3 sono:

$$x_1^*(\mathbf{p},m) = \frac{mp_2}{p_1p_2+4p_1^2}, \qquad x_2^*(\mathbf{p},m) = \frac{4mp_1}{4p_1p_2+p_2^2}$$

e possono essere riscritte come:

$$x_1^*(\mathbf{p},m) = m\left[\frac{p_1}{p_1}\times\frac{p_2}{p_1(p_2+4p_1)}\right] = m\left[\frac{1}{p_1^2}\frac{p_1p_2}{(p_2+4p_1)}\right] = \frac{m\left(\frac{1}{p_1^2}\right)}{\frac{p_2+4p_1}{p_1p_2}} = \frac{mp_1^{-2}}{\frac{1}{p_1}+\frac{4}{p_2}}$$
$$= \frac{mp_1^{-2}}{p_1^{-1}+4p_2^{-1}}$$

e

$$x_2^*(\mathbf{p},m) = 4m\left[\frac{p_2}{p_2}\times\frac{p_1}{p_2(p_2+4p_1)}\right] = 4m\left[\frac{1}{p_2^2}\frac{p_1p_2}{(p_2+4p_1)}\right] = \frac{4m\left(\frac{1}{p_2^2}\right)}{\frac{p_2+4p_1}{p_1p_2}} = \frac{4mp_2^{-2}}{\frac{1}{p_1}+\frac{4}{p_2}}$$
$$= \frac{4mp_2^{-2}}{p_1^{-1}+4p_2^{-1}}.$$

La funzione di utilità indiretta si può quindi riscrivere come:

$$\begin{aligned}
v(\mathbf{p},m) &= 2\left(\frac{mp_1^{-2}}{p_1^{-1}+4p_2^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}} + 4\left(\frac{4mp_2^{-2}}{p_1^{-1}+4p_2^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2m^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{p_1^{-1}+4p_2^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(p_1^{-2\times\frac{1}{2}}+4p_2^{-2\times\frac{1}{2}}\right) \\
&= 2m^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\left(p_1^{-1}+4p_2^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}}\left(p_1^{-1}+4p_2^{-1}\right) \\
&= 2m^{\frac{1}{2}}\left(p_1^{-1}+4p_2^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Per dimostrare la validità dell'Identità di Roy occorre calcolare le seguenti derivate:

$$\frac{\partial v(\cdot)}{\partial m} = m^{-\frac{1}{2}}\left(p_1^{-1}+4p_2^{-1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\partial v(\cdot)}{\partial p_1} = 2m^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}\left(p_1^{-1}+4p_2^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\left(-p_1^{-2}\right) = -m^{\frac{1}{2}}p_1^{-2}\left(p_1^{-1}+4p_2^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\partial v(\cdot)}{\partial p_2} = 2m^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}\left(p_1^{-1}+4p_2^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\left(-4p_2^{-2}\right) = -4m^{\frac{1}{2}}p_2^{-2}\left(p_1^{-1}+4p_2^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

È dunque possibile verificare che:

$$\begin{aligned}
-\frac{\frac{\partial v(\cdot)}{\partial p_1}}{\frac{\partial v(\cdot)}{\partial m}} = -\frac{\left[-m^{\frac{1}{2}}p_1^{-2}\left(p_1^{-1}+4p_2^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]}{m^{-\frac{1}{2}}\left(p_1^{-1}+4p_2^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}} &= m^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}p_1^{-2}\left(p_1^{-1}+4p_2^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{mp_1^{-2}}{p_1^{-1}+4p_2^{-1}} = x_1^*(\mathbf{p},m)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
-\frac{\frac{\partial v(\cdot)}{\partial p_2}}{\frac{\partial v(\cdot)}{\partial m}} = -\frac{\left[-4m^{\frac{1}{2}}p_2^{-2}\left(p_1^{-1}+4p_2^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]}{m^{-\frac{1}{2}}\left(p_1^{-1}+4p_2^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}} &= 4m^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}p_2^{-2}\left(p_1^{-1}+4p_2^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{4mp_2^{-2}}{p_1^{-1}+4p_2^{-1}} = x_2^*(\mathbf{p},m).
\end{aligned}$$

Le hicksiane per i due beni sono calcolate risolvendo problema di minimizzazione della spesa:

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \quad & p_1x_1 + p_2x_2 \\ \text{s.v.} \quad & 2x_1^{\frac{1}{2}} + 4x_2^{\frac{1}{2}} \geq u, \end{aligned}$$

cui corrispondono la lagrangiana $\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = p_1x_1 + p_2x_2 - \lambda\left(2x_1^{\frac{1}{2}} + 4x_2^{\frac{1}{2}} - u\right)$ e il sistema delle condizioni del prim'ordine:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_1} = p_1 - \lambda x_1^{-\frac{1}{2}} = 0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_2} = p_2 - 2\lambda x_2^{-\frac{1}{2}} = 0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}(\cdot)}{\partial\lambda} = 2x_1^{\frac{1}{2}} + 4x_2^{\frac{1}{2}} = 0. \end{cases}$$

Dividendo la prima equazione per la seconda si ottiene:

$$\frac{x_1^{-\frac{1}{2}}}{2x_2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x_1}}}{\frac{2}{\sqrt{x_2}}} = \frac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}} = \frac{p_1}{p_2}$$

ovvero:

$$\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = \frac{2p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = 4\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 \Rightarrow x_2 = 4\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 x_1.$$

Sostituendo $x_2 = 4\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 x_1$ nel vincolo si trova:

$$2x_1^{\frac{1}{2}} + 4\left[4\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 x_1\right]^{\frac{1}{2}} = 2x_1^{\frac{1}{2}} + \frac{8p_1}{p_2}x_1^{\frac{1}{2}} = u$$

che si può riscrivere come:

$$2x_1^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{4p_1}{p_2}\right) = 2x_1^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p_2 + 4p_1}{p_2}\right) = u \Rightarrow 2x_1^{\frac{1}{2}} = \frac{up_2}{p_2 + 4p_1} \Rightarrow x_1^{\frac{1}{2}} = \frac{up_2}{2(p_2 + 4p_1)}.$$

La funzione di domanda hicksiana relativa al bene 1 è dunque:

$$h_1^*(\mathbf{p}, u) = \left(\frac{up_2}{8p_1 + 2p_2}\right)^2,$$

mentre la domanda hicksiana relativa al bene 2 è:

$$\begin{aligned} h_2^*(\mathbf{p}, u) = 4\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 h_1^*(\mathbf{p}, u) &= 4\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2\left(\frac{up_2}{2(4p_1 + p_2)}\right)^2 \\ &= \frac{4p_1^2}{p_2^2}\frac{u^2p_2^2}{4(4p_1 + p_2)^2} \\ &= \left(\frac{up_1}{4p_1 + p_2}\right)^2 \\ &= 4\left(\frac{up_1}{8p_1 + 2p_2}\right)^2. \end{aligned}$$

La funzione di spesa è quindi:

$$\begin{aligned}
e(\mathbf{p},u) = p_1 h_1^*(\mathbf{p},u) + p_2 h_2^*(\mathbf{p},u) &= p_1\left(\frac{up_2}{8p_1+2p_2}\right)^2 + 4p_2\left(\frac{up_1}{8p_1+2p_2}\right)^2 \\
&= \frac{u^2p_1p_2^2}{(8p_1+2p_2)^2} + \frac{4u^2p_1^2p_2}{(8p_1+2p_2)^2} \\
&= \frac{u^2p_1p_2}{(8p_1+2p_2)^2}(p_2+4p_1)\times\frac{2}{2} \\
&= \frac{u^2p_1p_2}{(8p_1+2p_2)^2}\frac{(8p_1+2p_2)}{2} = \frac{u^2p_1p_2}{2(8p_1+2p_2)} \\
&= \frac{u^2p_1p_2}{16p_1+4p_2}.
\end{aligned}$$

La validità del Lemma di Shephard è verificata andando a calcolare:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e(\cdot)}{\partial p_1} &= \frac{u^2p_2(16p_1+4p_2)-16u^2p_1p_2}{(16p_1+4p_2)^2} = \frac{16u^2p_1p_2+4u^2p_2^2-16u^2p_1p_2}{(16p_1+4p_2)^2} \\
&= \frac{4u^2p_2^2}{[2(8p_1+2p_2)]^2} = \left(\frac{up_2}{8p_1+2p_2}\right)^2 = h_1^*(\mathbf{p},u)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e(\cdot)}{\partial p_2} &= \frac{u^2p_1(16p_1+4p_2)-4u^2p_1p_2}{(16p_1+4p_2)^2} = \frac{16u^2p_1^2+4u^2p_1p_2-4u^2p_1p_2}{(16p_1+4p_2)^2} \\
&= \frac{16u^2p_1^2}{4(8p_1+2p_2)^2} = 4\left(\frac{up_1}{8p_1+2p_2}\right)^2 = h_2^*(\mathbf{p},u).
\end{aligned}$$

È infine possibile verificare che:

$$\frac{\partial x_1(\cdot)}{\partial p_2} = \underbrace{mp_1^{-2}}_{>0}\underbrace{\underbrace{\left[-\left(p_1^{-1}+4p_2^{-1}\right)^{-2}\right]}_{<0}\underbrace{\left(-4p_2^{-2}\right)}_{<0}}_{>0} > 0,$$

$$\frac{\partial x_2(\cdot)}{\partial p_1} = \underbrace{4mp_2^{-2}}_{>0}\underbrace{\underbrace{\left[-\left(p_1^{-1}+4p_2^{-1}\right)^{-2}\right]}_{<0}\underbrace{\left(-p_1^{-2}\right)}_{<0}}_{>0} > 0,$$

$$\frac{\partial h_1(\cdot)}{\partial p_2} = 2\underbrace{\left(\frac{up_2}{8p_1+2p_2}\right)}_{>0}\underbrace{\left[\frac{u(8p_1+2p_2)-2up_2}{(8p_1+2p_2)^2}\right]}_{>0} > 0,$$

$$\frac{\partial h_2(\cdot)}{\partial p_1} = 8\underbrace{\left(\frac{up_1}{8p_1+2p_2}\right)}_{>0}\underbrace{\left[\frac{u(8p_1+2p_2)-8up_1}{(8p_1+2p_2)^2}\right]}_{>0} > 0.$$

I due beni sono quindi sostituti lordi e sostituti netti.

Esercizio 3

(*Continua da 1.8*) Si consideri la funzione $v\left(p_1, p_2, m\right) = \frac{m}{p_1} + \frac{m}{p_2}$, con p_1, p_2 e m positivi che rappresentano, rispettivamente, i prezzi dei beni 1 e 2 e la ricchezza del consumatore.

1. Data la funzione $v\left(\cdot\right)$, si trovino la funzione di spesa e le funzioni di domanda walrasiane e hicksiane.

Considerando un livello di ricchezza pari a $m = e(\mathbf{p}, u)$, si ha:

$$v\left(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)\right) = \frac{e(\mathbf{p}, u)}{p_1} + \frac{e(\mathbf{p}, u)}{p_2},$$

ed essendo $v\left(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)\right) = u$:

$$u = \frac{e(\mathbf{p}, u)}{p_1} + \frac{e(\mathbf{p}, u)}{p_2} = e(\mathbf{p}, u)\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}\right).$$

La funzione di spesa è perciò:

$$\begin{aligned} e(\mathbf{p}, u) &= \frac{u}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}} = \frac{u}{\frac{p_2+p_1}{p_1 p_1}} = \frac{u p_1 p_2}{p_1 + p_2} \\ &= \frac{u}{p_1^{-1} + p_2^{-1}}. \end{aligned}$$

Le funzioni di domanda marshalliane possono essere calcolate utilizzando l'Identità di Roy. Dalla funzione di utilità indiretta $v\left(\cdot\right)$ si trova che:

$$\frac{\partial v\left(\cdot\right)}{\partial m} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = p_1^{-1} + p_2^{-1}; \quad \frac{\partial v\left(\cdot\right)}{\partial p_1} = -m p_1^{-2}; \quad \frac{\partial v\left(\cdot\right)}{\partial p_2} = -m p_2^{-2}.$$

Le marshalliane sono quindi:

$$x_1^*\left(\mathbf{p}, m\right) = -\frac{\frac{\partial v(\cdot)}{\partial p_1}}{\frac{\partial v(\cdot)}{\partial m}} = \frac{m p_1^{-2}}{p_1^{-1} + p_2^{-1}}; \qquad x_2^*\left(\mathbf{p}, m\right) = -\frac{\frac{\partial v(\cdot)}{\partial p_2}}{\frac{\partial v(\cdot)}{\partial m}} = \frac{m p_2^{-2}}{p_1^{-1} + p_2^{-1}}.$$

Le funzioni di domanda hicksiane, infine, possono essere calcolate ricorrendo al Lemma di Shephard o utilizzando le funzioni walrasiane $x_1^*\left(\cdot\right)$ e $x_2^*\left(\cdot\right)$ e la funzione di spesa $e\left(\cdot\right)$. Nel secondo caso, sostituendo $e(\mathbf{p}, u)$ a m si trovano:

$$\begin{aligned} x_1^*\left(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)\right) &= \frac{e(\mathbf{p}, u) p_1^{-2}}{p_1^{-1} + p_2^{-1}} = \frac{\left(\frac{u}{p_1^{-1}+p_2^{-1}}\right) p_1^{-2}}{p_1^{-1} + p_2^{-1}} \\ &= \frac{u}{p_1^2\left(p_1^{-1} + p_2^{-2}\right)^2} = h_1^*\left(\mathbf{p}, u\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x_2^*\left(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)\right) &= \frac{e(\mathbf{p}, u) p_2^{-2}}{p_1^{-1} + p_2^{-1}} = \frac{\left(\frac{u}{p_1^{-1}+p_2^{-1}}\right) p_2^{-2}}{p_1^{-1} + p_2^{-1}} \\ &= \frac{u}{p_2^2\left(p_1^{-1} + p_2^{-1}\right)^2} = h_2^*\left(\mathbf{p}, u\right). \end{aligned}$$

Esercizio 4

La funzione di spesa di un consumatore è $e(p_1, p_2, u) = u\left(\frac{1}{3}p_1 + p_1^{\frac{1}{2}} p_2^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}p_2\right)$.

1. Quali sono le funzioni di domanda hicksiane?
2. Quali sono le funzioni di domanda marshalliane?
3. Si verifichi l'equazione di Slutsky per l'effetto di una variazione del prezzo p_1 sulla domanda del bene 1.

Le funzioni di domanda hicksiane si calcolano sfruttando il Lemma di Shephard:

$$h_1^*(\mathbf{p}, u) = \frac{\partial e(\cdot)}{\partial p_1} = u\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}p_1^{-\frac{1}{2}} p_2^{\frac{1}{2}}\right); \qquad h_2^*(\mathbf{p}, u) = \frac{\partial e(\cdot)}{\partial p_2} = u\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}p_1^{\frac{1}{2}} p_2^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Le funzioni marshalliane possono essere ottenute a partire dalla funzione di utilità indiretta. Considerando un livello di utilità pari a $u = v(\mathbf{p}, m)$, si ha:

$$e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) = v(\mathbf{p}, m)\left(\frac{1}{3}p_1 + p_1^{\frac{1}{2}} p_2^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}p_2\right),$$

ed essendo $e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) = m$:

$$m = v(\mathbf{p}, m)\left(\frac{1}{3}p_1 + p_1^{\frac{1}{2}} p_2^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}p_2\right),$$

da cui, risolvendo per $v(\mathbf{p}, m)$, si trova la funzione di utilità indiretta:

$$v(\mathbf{p}, m) = \frac{m}{\frac{1}{3}p_1 + p_1^{\frac{1}{2}} p_2^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}p_2}.$$

Sostituendo $v(\mathbf{p}, m)$ a u si ottengono quindi:

$$\begin{aligned} h_1^*(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) &= v(\mathbf{p}, m)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}p_1^{-\frac{1}{2}} p_2^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{m}{\frac{1}{3}p_1 + p_1^{\frac{1}{2}} p_2^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}p_2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}p_1^{-\frac{1}{2}} p_2^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{m\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}p_1^{-\frac{1}{2}} p_2^{\frac{1}{2}}\right)}{\frac{1}{3}p_1 + p_1^{\frac{1}{2}} p_2^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}p_2} \times \frac{6}{6} = \frac{m\left(2 + 3p_1^{-\frac{1}{2}} p_2^{\frac{1}{2}}\right)}{2\left(p_1 + 3p_1^{\frac{1}{2}} p_2^{\frac{1}{2}} + 2p_2\right)} \\ &= x_1^*(\mathbf{p}, m) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h_2^*(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) &= v(\mathbf{p}, m)\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}p_1^{\frac{1}{2}} p_2^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{m}{\frac{1}{3}p_1 + p_1^{\frac{1}{2}} p_2^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}p_2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}p_1^{\frac{1}{2}} p_2^{-\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{m\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}p_1^{\frac{1}{2}} p_2^{-\frac{1}{2}}\right)}{\frac{1}{3}p_1 + p_1^{\frac{1}{2}} p_2^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}p_2} \times \frac{6}{6} = \frac{m\left(4 + 3p_1^{\frac{1}{2}} p_2^{-\frac{1}{2}}\right)}{2\left(p_1 + 3p_1^{\frac{1}{2}} p_2^{\frac{1}{2}} + 2p_2\right)} \\ &= x_2^*(\mathbf{p}, m). \end{aligned}$$

L'equazione di Slutsky relativa all'effetto di una variazione di p_1 sulla domanda del bene 1 è $\frac{\partial x_1(\mathbf{p},m)}{\partial p_1} = \frac{\partial h_1(\mathbf{p},u)}{\partial p_1} - \frac{\partial x_1(\mathbf{p},w)}{\partial w} x_1(\mathbf{p},w)$. Il primo termine dell'equazione è:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_1(\mathbf{p},m)}{\partial p_1} &= \frac{m}{2}\left[\frac{\left(-\frac{3}{2}p_1^{-\frac{3}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}\right)\left(p_1+3p_1^{\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}+2p_2\right)-\left(2+3p_1^{-\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+\frac{3}{2}p_1^{-\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(p_1+3p_1^{\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}+2p_2\right)^2}\right] \\
&= \frac{m}{2}\left[\frac{\left(-\frac{3}{2}p_1^{-\frac{3}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}\right)\left(p_1+3p_1^{\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}+2p_2\right)}{\left(p_1+3p_1^{\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}+2p_2\right)^2}-\frac{\left(2+3p_1^{-\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+\frac{3}{2}p_1^{-\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(p_1+3p_1^{\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}+2p_2\right)^2}\right] \\
&= \frac{-\frac{3m}{4}p_1^{-\frac{3}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}}{p_1+3p_1^{\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}+2p_2}-\frac{\frac{m}{2}\left(2+3p_1^{-\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+\frac{3}{2}p_1^{-\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(p_1+3p_1^{\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}+2p_2\right)^2} \\
&= \frac{-3mp_1^{-\frac{3}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}}{4\left(p_1+3p_1^{\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}+2p_2\right)}-\frac{m\left(2+3p_1^{-\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+\frac{3}{2}p_1^{-\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}\right)}{2\left(p_1+3p_1^{\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}+2p_2\right)^2},
\end{aligned}$$

ed è pari alla differenza tra il secondo e il terzo termine. Il secondo è:

$$\frac{\partial h_1(\mathbf{p},u)}{\partial p_1} = \frac{u}{2}\left(-\frac{1}{2}p_1^{-\frac{3}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{u}{4}p_1^{-\frac{3}{2}}p_2^{\frac{1}{2}},$$

che per $u = v(\mathbf{p},m)$ si può riscrivere come:

$$\begin{aligned}
-\frac{v(\mathbf{p},m)}{4}p_1^{-\frac{3}{2}}p_2^{\frac{1}{2}} = -\frac{mp_1^{-\frac{3}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}}{4\left(\frac{1}{3}p_1+p_1^{\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}p_2\right)} &= -\frac{mp_1^{-\frac{3}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}}{4\left(\frac{1}{3}p_1+p_1^{\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}p_2\right)}\times\frac{3}{3} \\
&= -\frac{3mp_1^{-\frac{3}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}}{4\left(p_1+3p_1^{\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}+2p_2\right)};
\end{aligned}$$

il terzo termine, infine, è:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_1(\mathbf{p},w)}{\partial w}x_1(\mathbf{p},w) &= \left[\frac{2+3p_1^{-\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}}{2\left(p_1+3p_1^{\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}+2p_2\right)}\right]\frac{m\left(2+3p_1^{-\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}\right)}{2\left(p_1+3p_1^{\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}+2p_2\right)} \\
&= \frac{m\left(2+3p_1^{-\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}\right)\left(2+3p_1^{-\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}\right)}{4\left(p_1+3p_1^{\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}+2p_2\right)^2} = \frac{m\left(2+3p_1^{-\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}\right)2\left(1+\frac{3}{2}p_1^{-\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}\right)}{4\left(p_1+3p_1^{\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}+2p_2\right)^2} \\
&= \frac{m\left(2+3p_1^{-\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+\frac{3}{2}p_1^{-\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}\right)}{2\left(p_1+3p_1^{\frac{1}{2}}p_2^{\frac{1}{2}}+2p_2\right)^2}.
\end{aligned}$$

Esercizio 5

(*Continua da 1.5*) La funzione di utilità di un consumatore è $u(x_1, x_2) = x_1 + 2\sqrt{x_2}$.

1. Considerando solo soluzioni interiori, si verifichi l'Identità di Roy.
2. Considerando solo soluzioni interiori, si calcolino le domande hicksiane.
3. Si verifichi l'equazione di Slutsky per l'effetto di una variazione del prezzo p_1 sulla domanda del bene 1.

Le funzioni marshalliane calcolate nell'esercizio 1.5, considerando unicamente soluzioni interiori, sono:

$$x_1^*(\mathbf{p}, m) = \frac{m}{p_1} - \frac{p_1}{p_2}, \qquad x_2^*(\mathbf{p}) = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2$$

e la funzione di utilità indiretta è:

$$v(\mathbf{p}, m) = \frac{m}{p_1} + \frac{p_1}{p_2}.$$

La verifica dell'Identità di Roy richiede il calcolo delle seguenti derivate:

$$\frac{\partial v(\cdot)}{\partial m} = \frac{1}{p_1}, \qquad \frac{\partial v(\cdot)}{\partial p_1} = -\frac{m}{p_1^2} + \frac{1}{p_2}, \qquad \frac{\partial v(\cdot)}{\partial p_2} = -\frac{p_1}{p_2^2}.$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned}
-\frac{\frac{\partial v(\cdot)}{\partial p_1}}{\frac{\partial v(\cdot)}{\partial m}} &= -\left(\frac{-\frac{m}{p_1^2} + \frac{1}{p_2}}{\frac{1}{p_1}}\right) = -p_1\left(-\frac{m}{p_1^2} + \frac{1}{p_2}\right) \\
&= \frac{m}{p_1} - \frac{p_1}{p_2} \\
&= x_1^*(\mathbf{p}, m); \\
-\frac{\frac{\partial v(\cdot)}{\partial p_2}}{\frac{\partial v(\cdot)}{\partial m}} &= -\left(\frac{-\frac{p_1}{p_2^2}}{\frac{1}{p_1}}\right) = -p_1\left(-\frac{p_1}{p_2^2}\right) \\
&= \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 \\
&= x_2^*(\mathbf{p}, m).
\end{aligned}$$

Le funzioni hicksiane possono essere ottenute sfruttando la dualità tra massimizzazione dell'utilità e minimizzazione della spesa o considerando il problema di ottimo vincolato:

$$\begin{aligned}
&\min_{x_1, x_2} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 \\
&\text{s.v.} \quad x_1 + 2\sqrt{x_2} \geq u,
\end{aligned}$$

che, considerando unicamente soluzioni interiori, si risolve a partire dalla lagrangiana $\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = p_1 x_1 + p_2 x_2 - \lambda\left(x_1 + 2\sqrt{x_2} - u\right)$ e dal sistema delle condizioni del prim'ordine:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_1} = p_1 - \lambda = 0 \\
\dfrac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_2} = p_2 - 2\lambda\left(\dfrac{1}{2}x_2^{-\frac{1}{2}}\right) = p_2 - \lambda x_2^{-\frac{1}{2}} = 0 \\
\dfrac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda} = x_1 + 2\sqrt{x_2} - u = 0.
\end{cases}$$

Dividendo la prima equazione per la seconda si trova la funzione hicksiana relativa al bene 2:

$$\frac{1}{x_2^{-\frac{1}{2}}} = x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow h_2^*(\mathbf{p}) = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2,$$

che non dipende da u e coincide dunque con la marshalliana. Sostituendo nel vincolo si ottiene infine:

$$x_1 + 2\sqrt{\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2} = x_1 + \frac{2p_1}{p_2} = u,$$

da cui si trova l'hicksiana relativa al bene 1:

$$h_1^*(\mathbf{p}, u) = u - \frac{2p_1}{p_2}.$$

L'equazione di Slutsky relativa all'effetto di una variazione di p_1 sulla domanda del bene 1 è $\frac{\partial x_1(\mathbf{p},m)}{\partial p_1} = \frac{\partial h_1(\mathbf{p},u)}{\partial p_1} - \frac{\partial x_1(\mathbf{p},w)}{\partial w} x_1(\mathbf{p}, w)$, dove:

$$\frac{\partial x_1(\cdot)}{\partial p_1} = -\frac{m}{p_1^2} - \frac{1}{p_2}; \qquad \frac{\partial h_1(\cdot)}{\partial p_1} = -\frac{2}{p_2}; \qquad \frac{\partial x_1(\cdot)}{\partial w} = \frac{1}{p_1}.$$

Si può quindi verificare che:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_1(\mathbf{p}, u)}{\partial p_1} - \frac{\partial x_1(\mathbf{p}, w)}{\partial w} x_1(\mathbf{p}, w) &= -\frac{2}{p_2} - \frac{1}{p_1}\left(\frac{m}{p_1} - \frac{p_1}{p_2}\right) \\
&= -\frac{2}{p_2} - \frac{m}{p_1^2} + \frac{1}{p_2} \\
&= -\frac{m}{p_1^2} - \frac{1}{p_2} \\
&= \frac{\partial x_1(\mathbf{p}, m)}{\partial p_1}.
\end{aligned}$$

Esercizio 6

(*Continua da 1.7*) Un consumatore con funzione di utilità $u(x_1, x_2) = \min\left\{x_1,\ x_2^{\frac{1}{2}}\right\}$ e reddito m fronteggia i prezzi p_1 e p_2.

1. Si ricavi la funzione di spesa partendo dalla funzione di utilità indiretta.
2. Si ricavi la funzione di domanda hicksiana per entrambi i beni partendo dalla domanda walrasiana.
3. Si verifichi l'Identità di Roy.
4. Si verifichi il lemma di Shephard.
5. Si calcoli la matrice di sostituzione di Slutsky.

Le funzioni marshalliane calcolate nell'esercizio 1.7 sono:

$$x_1^*(\mathbf{p}, m) = \frac{\sqrt{p_1^2 + 4p_2 m} - p_1}{2p_2}, \quad x_2^*(\mathbf{p}, m) = \left(\frac{\sqrt{p_1^2 + 4p_2 m} - p_1}{2p_2}\right)^2$$

e la funzione di utilità indiretta è:

$$v(\mathbf{p}, m) = \frac{\sqrt{p_1^2 + 4p_2 m} - p_1}{2p_2}.$$

Considerando un livello di ricchezza pari a $m = e(\mathbf{p}, u)$, si ha:

$$v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = \frac{\sqrt{p_1^2 + 4p_2 e(\mathbf{p}, u)} - p_1}{2p_2},$$

che, poiché $v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = u$, si può riscrivere come $u = \frac{\sqrt{p_1^2+4p_2 e(\mathbf{p},u)}-p_1}{2p_2}$. Si ha quindi:

$$2up_2 + p_1 = \sqrt{p_1^2 + 4p_2 e(\mathbf{p}, u)} \Rightarrow (2up_2 + p_1)^2 = p_1^2 + 4p_2 e(\mathbf{p}, u)$$

da cui:

$$4p_2 e(\mathbf{p}, u) = \left(4u^2 p_2^2 + p_1^2 + 4up_1 p_2\right) - p_1^2 \Rightarrow p_2 e(\mathbf{p}, u) = u^2 p_2^2 + up_1 p_2.$$

La funzione di spesa è perciò:

$$e(\mathbf{p}, u) = u^2 p_2 + up_1.$$

Considerando la funzione walrasiana $x_1^*(\cdot)$ e sostituendo $e(\mathbf{p}, u)$ alla ricchezza m si trova:

$$x_1^*(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = \frac{\sqrt{p_1^2 + 4p_2 e(\mathbf{p}, u)} - p_1}{2p_2} = \frac{\sqrt{p_1^2 + 4p_2\left(u^2 p_2 + up_1\right)} - p_1}{2p_2},$$

che si può riscrivere come:

$$\frac{\sqrt{\left(p_1^2 + 4u^2 p_2^2 + 4up_1 p_2\right)} - p_1}{2p_2} = \frac{\sqrt{(p_1 + 2up_2)^2} - p_1}{2p_2}$$
$$\frac{p_1 + 2up_2 - p_1}{2p_2} = \frac{2up_2}{2p_2}.$$

La funzione di domanda hicksiana relativa al bene 1 è dunque:

$$h_1^*(u) = u.$$

Per secondo bene, analogamente, si ottiene:

$$x_2^*(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = \left(\frac{\sqrt{p_1^2 + 4p_2 e(\mathbf{p}, u)} - p_1}{2p_2}\right)^2$$

e la domanda hicksiana relativa al bene 2 è:

$$h_2^*(u) = u^2.$$

La validità del Lemma di Shephard è verificata calcolando:

$$\frac{\partial e(\cdot)}{\partial p_1} = u = h_1^*(u); \quad \frac{\partial e(\cdot)}{\partial p_2} = u^2 = h_2^*(u).$$

Per verificare la validità dell'Identità di Roy occorre invece calcolare:

$$\frac{\partial v(\cdot)}{\partial m} = \frac{1}{2p_2}\left[\frac{1}{2}\left(p_1^2 + 4p_2 m\right)^{-\frac{1}{2}}\right](4p_2) = \frac{1}{\sqrt{p_1^2 + 4p_2 m}},$$

$$\frac{\partial v(\cdot)}{\partial p_1} = \frac{1}{2p_2}\left[\frac{1}{2}\left(p_1^2+4p_2m\right)^{-\frac{1}{2}}(2p_1)-1\right] = \frac{p_1\left(p_1^2+4p_2m\right)^{-\frac{1}{2}}-1}{2p_2},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v(\cdot)}{\partial p_2} &= \frac{\left[\frac{1}{2}\left(p_1^2+4p_2m\right)^{-\frac{1}{2}}(4m)(2p_2)-2\left(p_1^2+4p_2m\right)^{\frac{1}{2}}\right]}{(2p_2)^2} - \frac{p_1}{2}\left(-p_2^{-2}\right)\\
&= \frac{4mp_2\left(p_1^2+4p_2m\right)^{-\frac{1}{2}}-2\left(p_1^2+4p_2m\right)^{\frac{1}{2}}}{4p_2^2}+\frac{p_1}{2p_2^2}\\
&= \frac{2mp_2\left(p_1^2+4p_2m\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(p_1^2+4p_2m\right)^{\frac{1}{2}}}{2p_2^2}+\frac{p_1}{2p_2^2}\\
&= \frac{p_1+2mp_2\left(p_1^2+4p_2m\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(p_1^2+4p_2m\right)^{\frac{1}{2}}}{2p_2^2}\\
&= \frac{p_1-\left(p_1^2+4p_2m\right)^{\frac{1}{2}}}{2p_2^2}+\frac{m\left(p_1^2+4p_2m\right)^{-\frac{1}{2}}}{p_2}.
\end{aligned}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned}
-\frac{\frac{\partial v(\cdot)}{\partial p_1}}{\frac{\partial v(\cdot)}{\partial m}} = -\frac{\frac{p_1\left(p_1^2+4p_2m\right)^{-\frac{1}{2}}-1}{2p_2}}{\frac{1}{\left(p_1^2+4p_2m\right)^{\frac{1}{2}}}} &= -\left(p_1^2+4p_2m\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{p_1\left(p_1^2+4p_2m\right)^{-\frac{1}{2}}-1}{2p_2}\right]\\
&= -\left[\frac{p_1}{2p_2}-\frac{\left(p_1^2+4p_2m\right)^{\frac{1}{2}}}{2p_2}\right]\\
&= \frac{\left(p_1^2+4p_2m\right)^{\frac{1}{2}}-p_1}{2p_2} = x_1^*(\mathbf{p},m),
\end{aligned}$$

$$-\frac{\frac{\partial v(\cdot)}{\partial p_2}}{\frac{\partial v(\cdot)}{\partial m}} = -\frac{\frac{p_1-\left(p_1^2+4p_2m\right)^{\frac{1}{2}}}{2p_2^2}+\frac{m\left(p_1^2+4p_2m\right)^{-\frac{1}{2}}}{p_2}}{\frac{1}{\left(p_1^2+4p_2m\right)^{\frac{1}{2}}}}$$

$$\begin{aligned}
&= -\left(p_1^2+4p_2m\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{p_1-\left(p_1^2+4p_2m\right)^{\frac{1}{2}}}{2p_2^2}+\frac{m\left(p_1^2+4p_2m\right)^{-\frac{1}{2}}}{p_2}\right]\\
&= \frac{p_1^2+2p_2m-p_1\left(p_1^2+4p_2m\right)^{\frac{1}{2}}}{2p_2^2} = \frac{p_1^2+2p_2m-p_1\left(p_1^2+4p_2m\right)^{\frac{1}{2}}}{2p_2^2}\times\frac{2}{2}\\
&= \frac{2p_1^2+4p_2m-2p_1\left(p_1^2+4p_2m\right)^{\frac{1}{2}}}{4p_2^2}\\
&= \frac{p_1^2+4p_2m-2p_1\left(p_1^2+4p_2m\right)^{\frac{1}{2}}+p_1^2}{4p_2^2}\\
&= \frac{\left[(p_1+4p_2m)^{\frac{1}{2}}-p_1\right]^2}{4p_2^2}\\
&= \left(\frac{\sqrt{p_1+4p_2m}-p_1}{2p_2}\right)^2 = x_2^*(\mathbf{p},m),
\end{aligned}$$

La matrice di sostituzione di Slutsky, infine, è:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(\cdot)}{\partial p_1} & \frac{\partial h_1(\cdot)}{\partial p_2} \\ \frac{\partial h_2(\cdot)}{\partial p_1} & \frac{\partial h_2(\cdot)}{\partial p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(\cdot)}{\partial p_1} & \frac{\partial x_1(\cdot)}{\partial p_2} \\ \frac{\partial x_2(\cdot)}{\partial p_1} & \frac{\partial x_2(\cdot)}{\partial p_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(\cdot)}{\partial w} x_1(\cdot) & \frac{\partial x_1(\cdot)}{\partial w} x_2(\cdot) \\ \frac{\partial x_2(\cdot)}{\partial w} x_1(\cdot) & \frac{\partial x_2(\cdot)}{\partial w} x_2(\cdot) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'effetto di sostituzione relativo al caso di preferenze per beni perfetti complementi è quindi nullo.

Esercizio 7

Si considerino due beni e la funzione di spesa $e(p_1, p_2, u) = \left[3\left(\frac{3}{2}\right)^2 p_1^2 p_2 \exp(u)\right]^{\frac{1}{3}}$.

1. Si ricavi la funzione di utilità indiretta del consumatore.
2. Si calcolino le funzioni di domanda walrasiana dei due beni.

Considerando un livello di utilità $u = v(\mathbf{p}, m)$, si ha:

$$e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) = \left[3\left(\frac{3}{2}\right)^2 p_1^2 p_2 \exp(v(\mathbf{p}, m))\right]^{\frac{1}{3}}$$

e poiché $e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) = m$:

$$m = \left[3\left(\frac{3}{2}\right)^2 p_1^2 p_2 \exp(v(\mathbf{p}, m))\right]^{\frac{1}{3}} \Rightarrow [\exp(v(\mathbf{p}, m))]^{\frac{1}{3}} = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{p_1^2 p_2}\right]^{\frac{1}{3}} m$$

elevando ambo i membri al cubo si trova quindi:

$$\exp(v(\mathbf{p}, m)) = \frac{m^3}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{p_1^2 p_2} = \frac{4m^3}{27 p_1^2 p_2}$$

e prendendo il logaritmo naturale si ottiene la funzione di utilità indiretta:

$$v(\mathbf{p}, m) = \log\left[\frac{4m^3}{27 p_1^2 p_2}\right].$$

Le funzioni marshalliane possono essere calcolate sfruttando l'Identità di Roy. Derivando la funzione di utilità indiretta $v(\cdot)$ si trovano:

$$\frac{\partial v(\cdot)}{\partial m} = \left(\frac{27 p_1^2 p_2}{4m^3}\right)\left(\frac{12m^2}{27 p_1^2 p_2}\right) = \frac{3}{m},$$

$$\frac{\partial v(\cdot)}{\partial p_1} = \left(\frac{27 p_1^2 p_2}{4m^3}\right)\left[\left(\frac{4m^3}{27 p_2}\right)\left(-2p_1^{-3}\right)\right] = -\frac{2p_1^2}{p_1^3} = -\frac{2}{p_1},$$

$$\frac{\partial v(\cdot)}{\partial p_2} = \left(\frac{27 p_1^2 p_2}{4m^3}\right)\left[\left(\frac{4m^3}{27 p_1^2}\right)\left(-p_2^{-2}\right)\right] = -\frac{p_2}{p_2^2} = -\frac{1}{p_2}.$$

Le marshalliane sono quindi:

$$x_1^*(p_1, m) = -\frac{\frac{\partial v(\cdot)}{\partial p_1}}{\frac{\partial v(\cdot)}{\partial m}} = -\frac{\left(-\frac{2}{p_1}\right)}{\frac{3}{m}} = \frac{2m}{3p_1}; \qquad x_2^*(p_2, m) = -\frac{\frac{\partial v(\cdot)}{\partial p_2}}{\frac{\partial v(\cdot)}{\partial m}} = -\frac{\left(-\frac{1}{p_2}\right)}{\frac{3}{m}} = \frac{m}{3p_2}.$$

Esercizio 8

Si consideri una funzione di utilità del tipo $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$ e si verifichi l'equazione di Slutsky per l'effetto di una variazione del prezzo p_1 sulla domanda del bene 1.

Le funzioni di domanda marshalliane si trovano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m. \end{cases}$$

Sostituendo $x_1 = x_2$ nel vincolo, si ottiene:

$$x_1 (p_1 + p_2) = m$$

e le marshalliane sono dunque:

$$x_1^* (\mathbf{p}, m) = x_2^* (\mathbf{p}, m) = \frac{m}{p_1 + p_2}.$$

Sostituendo in $u(\cdot)$ si trova quindi la funzione di utilità indiretta:

$$v(\mathbf{p}, m) = u(x_1^*(\mathbf{p}, m), x_2^*(\mathbf{p}, m)) = \frac{m}{p_1 + p_2},$$

da cui si trova la funzione di spesa:

$$u = \frac{e(\mathbf{p}, u)}{p_1 + p_2} \Rightarrow e(\mathbf{p}, u) = u(p_1 + p_2).$$

Applicando il Lemma di Shephard si trova che $\frac{\partial(\cdot)}{\partial p_1} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial p_2} = u$. Le funzioni di domanda hicksiane sono perciò:

$$h_1^*(u) = h_2^*(u) = u.$$

L'equazione di Slutsky relativa all'effetto di una variazione di p_1 sulla domanda del bene 1 è $\frac{\partial h_1(\mathbf{p},u)}{\partial p_1} = \frac{\partial x_1(\mathbf{p},m)}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1(\mathbf{p},w)}{\partial w} x_1(\mathbf{p}, w)$, dove:

$$\frac{\partial h_1(\cdot)}{\partial p_1} = 0, \qquad \frac{\partial x_1(\cdot)}{\partial p_1} = -\frac{m}{(p_1 + p_2)^2},$$

$$\frac{\partial x_1(\cdot)}{\partial w} = \frac{1}{p_1 + p_2} \Rightarrow \frac{\partial x_1(\cdot)}{\partial w} x_1(\cdot) = \frac{m}{(p_1 + p_2)^2}.$$

Esercizio 9

Sia la funzione di spesa di un consumatore

$$e(p_1, p_2, u) = \frac{u p_1 p_2}{2p_1 + p_2}.$$

1. Si ricavino le domande hicksiane dei due beni.
2. Si ricavino le domande walrasiane per i due beni.
3. Si verifichi l'equazione di Slutsky considerando soltanto l'effetto della variazione di p_1 sulla quantità domandata del bene 1.

Le funzioni di domanda hicksiane sono ottenut applicando il Lemma di Shephard:

$$\frac{\partial e(\cdot)}{\partial p_1} = h_1^*(\mathbf{p}, u) = \frac{up_2(2p_1+p_2) - 2up_1p_2}{(2p_1+p_2)^2} = \frac{up_2^2}{(2p_1+p_2)^2},$$

$$\frac{\partial e(\cdot)}{\partial p_2} = h_2^*(\mathbf{p}, u) = \frac{up_1(2p_1+p_2) - up_1p_2}{(2p_1+p_2)^2} = \frac{2up_1^2}{(2p_1+p_2)^2},$$

mentre la funzione di utilità indiretta è:

$$m = \frac{v(\mathbf{p}, m)\, p_1p_2}{2p_1+p_2} \Rightarrow v(\mathbf{p}, m) = \frac{m(2p_1+p_2)}{p_1p_2}.$$

Sostituendo $v(\mathbf{p}, m)$ in $h_1^*(\cdot)$ e $h_2^*(\cdot)$ si ottengono le funzioni marshalliane:

$$\begin{aligned} h_1^*(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) &= \frac{m(2p_1+p_2)}{p_1p_2}\frac{p_2^2}{(2p_1+p_2)^2} \\ &= \frac{mp_2}{p_1(2p_1+p_2)} = x_1^*(\mathbf{p}, m), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2^*(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) &= \frac{m(2p_1+p_2)}{p_1p_2}\frac{2p_1^2}{(2p_1+p_2)^2} \\ &= \frac{2mp_1}{p_1(2p_1+p_2)} = x_1^*(\mathbf{p}, m). \end{aligned}$$

L'equazione di Slutsky relativa all'effetto di una variazione di p_1 sulla domanda del bene 1 è $\frac{\partial h_1(\mathbf{p},u)}{\partial p_1} = \frac{\partial x_1(\mathbf{p},m)}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1(\mathbf{p},w)}{\partial w} x_1(\mathbf{p}, w)$. Il secondo termine dell'equazione è:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1(\cdot)}{\partial p_1} &= mp_2\left[-p_1^{-2}(2p_1+p_2)^{-1} - 2p_1^{-1}(2p_1+p_2)^{-2}\right] \\ &= -mp_2\left[\frac{1}{p_1^2(2p_1+p_2)} + \frac{2}{p_1(2p_1+p_2)^2}\right] \\ &= -mp_2\left[\frac{2p_1+p_2+2p_1}{p_1^2(2p_1+p_2)^2}\right] = -\frac{mp_2(4p_1+p_2)}{p_1^2(2p_1+p_2)^2}, \end{aligned}$$

mentre il terzo termine è:

$$\frac{\partial x_1(\cdot)}{\partial w}x_1(\cdot) = \left[\frac{p_2}{p_1(2p_1+p_2)}\right]\frac{mp_2}{p_1(2p_1+p_2)} = \frac{mp_2^2}{p_1^2(2p_1+p_2)^2}$$

e dunque:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1(\cdot)}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1(\cdot)}{\partial w}x_1(\cdot) &= -\frac{mp_2(4p_1+p_2)}{p_1^2(2p_1+p_2)^2} + \frac{mp_2^2}{p_1^2(2p_1+p_2)^2} \\ &= \frac{mp_2^2 - mp_2^2 - 4mp_1p_2}{p_1^2(2p_1+p_2)^2} = -\frac{4mp_2}{p_1(2p_1+p_2)^2}. \end{aligned}$$

Il primo termine dell'equazione, infine, è:

$$\frac{\partial h_1(\cdot)}{\partial p_1} = -\frac{4up_2^2}{(2p_1+p_2)^3},$$

che, posto $u = v(\mathbf{p}, m)$, diviene:

$$\frac{\partial h_1(\cdot)}{\partial p_1} = -\frac{4p_2^2}{(2p_1+p_2)^3}\left[\frac{m(2p_1+p_2)}{p_1p_2}\right] = -\frac{4mp_2}{p_1(2p_1+p_2)^2}.$$